



A new logic system - based on the research turning of the liar paradox

Qingcai Feng

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

August 27, 2019

新逻辑学系统研究

--基于说谎者悖论的研究转向

（ 云南 昆明 冯庆才 650222 ）

【摘要】 本文作者发现了一类新的命题，并初步创立了一个新的逻辑系统。说谎者悖论根源于混淆了两类不同的命题，混淆了不同的逻辑系统。说谎者悖论的研究应该转向新逻辑系统的研究，只有这样，说谎者悖论才能得到最终的解决。

【关键词】 说谎者悖论 命题分类 新逻辑系统

一 新的命题分类

按照命题谈论的对象是否为命题（或语句），我们可以把命题分为两类：

第一类命题：谈论的对象不是命题

例如：

- 1，北京是一座美丽的城市
- 2，雪是白的，并且马是动物
-

这类命题谈论的对象是：北京、雪、马……这些对象不是命题。显然，这类命题是一阶逻辑范围内的命题。

第二类命题：谈论命题的命题

例如：

- 1，本语句是假的
- 2，雪是白的，并且前面那句话是真的
- 3，雪是白的，并且前面那句话有四个字
- 4，雪是白的，并且前面那句话是用中文写的
-

例 1 是说谎者悖论最为常见的一个版本，它本身是一个命题，它谈论的是自己，所以它属于谈论命题的命题，这类命题就是平常所说的自指命题。例 2、3、4 的第二个支命题都在谈论第一个支命题，所以这类命题也属于谈论命题的命题，它们是非自指命题（其中，第一个支命题是被谈论的命题，第二个支命题是作为谈论者的命题）。

本文的观点认为：第二类命题是一类特殊的命题，它们不在一阶逻辑的范围之内。也就

是说，第二类命题，不管是自指命题还是非自指命题，只要命题谈论对象是命题，那么它们就具有和第一类命题不同的性质。

这样的观点是新颖的：1、目前逻辑学家的注意力过多地集中在说谎者语句上，忽略了其它的自指命题和非自指命题，视野过于狭窄，这是一直找不到说谎者悖论的根源的原因。我们应该开阔视野，从研究说谎者语句转向研究整个第二类命题，因为第二类命题中有许多性质奇特的语句，说谎者语句只是其中之一。2、塔斯基认为，语义悖论产生于以下两个假设：（1）语言在语义上是封闭的。（2）通常的逻辑规律成立。他不愿否认（2），从而否认了（1）。本文的观点和他的不同，本文认为通常的逻辑规律（一阶逻辑的规律）并非对所有命题都成立，通常的逻辑规律对第二类命题——谈论命题的命题，不成立。也就是说，第一类命题是一阶逻辑范围内的命题，而第二类命题和第一类命题的性质不同，它们不在一阶逻辑的范围之内。

二 证明第二类命题不在一阶逻辑的范围之内

除了自指语句，非自指语句（例如：雪是白的，并且前面那句话是真的）也是“不正常的”，它们都不在一阶逻辑的范围之内。下面我将重点分析我们认为“正常”的非自指语句，找出它们的“不正常”之处，以便发现目前逻辑学的混乱之处。

（一）重言式（合取交换律）的一个反例

由重言式： $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ 可知 $(p \wedge q)$ 与 $(q \wedge p)$ 等值

但是合取交换律对第二类命题，谈论命题的命题无效。

例如：

“雪是白的，并且前面那句话是真的” （真） 即： $p \wedge q$ 为真。

但是注意：

“前面那句话是真的，并且雪是白的”却没有真值。 即： $q \wedge p$ 没有真值。

因为命题 q ：“前面那句话是真的”的前面没有语句，它没有谈论的对象。

因此，作为重言式： $(q \wedge p) \leftrightarrow (p \wedge q)$ 的一个实例：

“前面那句话是真的，并且雪是白的 当且仅当 雪是白的，并且前面那句话是真的”

由于等值式前件中的“前面那句话是真的”没有谈论的对象，所以，整个“重言式”的实例也就没有真值。

这样的例子还有很多，比如：“雪是白的，并且前面那句话是用中文写的”等等。

对此，我们只能给出如下解释：

“雪是白的，并且前面那句话是真的”中的“前面那句话是真的”的谈论对象是“雪是白的”

但是，“前面那句话是真的，并且雪是白的”中的“前面那句话是真的”没有谈论的对象，所以，这两个合取式中的“前面那句话是真的”并不是同一个命题。这说明，在第二类

命题中，改变两个合取支的顺序会改变其中的命题。

但是在一阶逻辑中，改变合取支的顺序并不会改变其中的命题。

例如：雪是白的，并且马是动物。交换合取支的顺序：马是动物，并且雪是白的。其中的命题没有改变。

显然，析取交换律对第二类命题也是无效的。

例如：

雪是白的，或者前面那句话是真的。（这个析取式是真的）

前面那句话是真的，或者雪是白的。（由于第一个析取支没有谈论的对象，整个析取式没有真值）

结论：合取（或析取）交换律是一阶逻辑的定理，它适用于一阶逻辑范围内的所有命题，但交换律对这类命题不适用，所以，这类命题不在一阶逻辑的范围之内。

（二）蕴析律的反例

蕴析律： $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

分析它的一个实例：如果雪是白的，那么雪是有颜色的（真）当且仅当并非雪是白的，或雪是有颜色的（真）。显然，在一阶逻辑的范围内，蕴析律是成立的。

但是在第二类命题，谈论命题的命题里，我们可以找到反例：

（1）如果雪是白的，那么前面那句话是真的。（真）

（2）并非雪是白的，或前面那句话是真的。（假）

（1）和（2）的真值并不相等，蕴析律无效。后面分析说谎者悖论时，我会再次分析这个例子。

结论：蕴析律是一阶逻辑的定理，它适用于一阶逻辑范围内的所有命题，但蕴析律对这类命题不适用，所以，这类命题不在一阶逻辑的范围之内。

（三）违反外延原则的例子

一阶逻辑预设外延原则。就命题而言，外延原则说的是在一个复合命题中，用与某支命题具有同样真值的命题去替换这个支命题，整个复合命题的真值保持不变。

例如：

A，雪是白的，并且马是动物（真）

用同样为真的“北京是中国的首都”替换“雪是白的”

得到：

B，北京是中国的首都，并且马是动物（真）

替换后，复合命题的真值保持不变。这是外延原则的一个实例。

在第二类命题中，我们能找到反例。

例如：

C，雪是白的，并且前面那句话有四个字（真）

用同样为真的“北京是中国的首都”替换“雪是白的”

得到：

D，北京是中国的首都，并且前面那句话有四个字（假）

替换后复合命题由真变假。这违反了一阶逻辑的外延原则。

结论：一阶逻辑预设外延原则，但第二类命题不符合外延原则，所以第二类命题不在一阶逻辑的范围之内。

（四）第二类命题的一个特殊性质

对比第一类命题和第二类命题，我们很容易发现它们的一个不同点。考虑第一类命题中的一个复合命题：

（1）雪是白的，并且马是动物

这个复合命题里一共有两个简单命题。

当我们用“北京是中国的首都”替换“雪是白的”得到：

（2）北京是中国的首都，并且马是动物

替换后，（2）中只有一个命题发生改变，没有被替换的命题“马是动物”不变。

考虑第二类命题中的一个复合命题：

（3）雪是白的，并且前面那句话有四个字（真）

用“北京是中国的首都”替换“雪是白的”得到：

（4）北京是中国的首都，并且前面那句话有四个字（假）（外延原则失效）

在（3）中的“前面那句话有四个字”谈论的是“雪是白的”，它在断言：“雪是白的”这句话有四个字。

在（4）中的“前面那句话有四个字”谈论的是“北京是中国的首都”，它在断言：“北京是中国的首都”这句话有四个字。

显然，（3）和（4）中的“前面那句话有四个字”并不是同一个命题，也就是说，在第二类命题中，如果被谈论的命题被替换，那么谈论它的命题的涵义也随之改变，变成了别的命题。也就是说，替换一个命题后，（4）中的两个命题都发生了改变。

这说明，在第一类命题里，替换一个命题时，只有一个命题发生改变；但在第二类命题里，替换一个命题，会使不被替换的命题也发生改变，即：替换一个命题相当于替换了两个命题。这个性质是第一类命题和第二类命题的一个重要区别。这一性质根源于：第一类命题

谈论的对象不是命题，命题之间是独立的，而第二类命题谈论的对象是命题，命题之间是相互关联的。这就是在第二类命题中，外延原则失效的原因。显然，由于这个性质，第二类命题不在一阶逻辑的范围之内。

三 第二类命题的一些奇特性质

虽然有的逻辑学家认识到自指语句是一类特殊的语句，但是所有的逻辑学家都没有注意到非自指语句也是一类特殊的语句。下面列举的例子将表明：1、自指语句和类似的非自指语句都有某些共同的奇特性质。2、自指语句和非自指语句有一个共同点，它们都属于谈论命题的命题，谈论命题这个共同特点是这些命题具有奇特性质的原因。

（一）谈论“书写者”的语句

直觉上，我们会认为一个语句的真假和语句的书写者无关。例如：在第一类命题中，“雪是白的”这个语句，不管是谁写的，它都是真的。如果一个语句谈论的对象不是语句的“书写者”，那么这个直觉是正确。但是如果一个语句谈论的对象恰好就是语句的“书写者”时，情况就不同了。在第二类命题中，我们能找到这个直觉的反例。考虑：

（1）本语句是柏拉图写的

（2）雪是白的，并且前面那句话是柏拉图写的

假设语句（1）和（2）是柏拉图写的，则它们是真的；假设语句（1）和（2）不是柏拉图写的，而是别的人写的，则它们是假的。

思考：在第二类命题中，（1）和（2）这类语句的真值为什么和语句的书写者有关？而在第一类命题中，语句的真值和书写者无关？

由于第一类命题谈论的对象不是语句，当然不会涉及谈论“语句书写者”的命题，所以在第一类命题中，或更进一步地说，当一个语句不是谈论语句的“书写者”时，假设改变“语句的书写者”不会改变语句的断言，不会改变语句的主词所指称的对象，也不会改变语句主词所指称的对象的属性，不会改变语句的真值，因为它们都是同一命题。

例如，第一类命题里的这个语句：雪是白的

无论谁写这个语句，“雪”这个被谈论的对象不会发生改变，雪所具有的“白的”这个属性都不会改变，它都是在断言：雪是白的，它都是真的，都是同一个命题。

对比第二类命题中的：

（1）本语句是柏拉图写的

（2）雪是白的，并且前面那句话是柏拉图写的

语句（1）和（2）在谈论语句的“书写者”。

第一、假设语句（1）和（2）是柏拉图写的，则它们是真的。

第二、假设语句（1）和（2）不是柏拉图写的，而是苏格拉底写的，则它们是假的。

第三、同一命题不会既真又假，所以语句（1）和（2）在“假设是柏拉图写的”和“假设是苏格拉底写的”这两种情况下表达的是不同的命题。

第四、假设语句（1）是柏拉图写的，则我们在假设（1）的主词“本语句”的指称对象具有“柏拉图写的”这个属性；假设语句（1）是苏格拉底写的，则我们在假设“本语句”

的指称对象具有“苏格拉底写的”这个属性。显然，在这两种不同的假设下，我们假设语句（1）的主词的指称对象的属性发生了改变，所以，语句（1）在不同的假设下表达的是不同的命题。类似的分析也适用于语句（2）。

结论：1、语句（1）和（2）属于谈论“书写者”的语句。2、谈论“书写者”的语句和别的语句不同，别的语句在改变语句的“书写者时”，表达的还是同一命题，其真值不变；对于谈论“书写者”的语句而言，当我们假设语句的“书写者”不同时，它们表达的是不同的命题，否则，我们就必须承认它们是既真又假的“悖论”。

语句（1）是自指语句，（2）是非自指语句，这两个语句的共同点：同属于第二类命题，谈论命题的命题，这个共同点是它们具有共同性质（语句的真值和语句的书写者有关）的原因。这个共同的性质不是由命题的自指造成的，因为非自指语句也有这个性质。这样的分析也适用于后面的相关例子。

（二）谈论“字数”的语句

在第一类命题中，一个语句的字数和真值无关，例如：

（A）雪是白的，并且马是动物

（B）雪是白色的。并且马是动物

这两个命题都是真的。

但是在第二类命题中，当一个语句谈论的对象恰好是语句的“字数”时，情况就不同了。

（1）本语句共有八个字（真）

（2）本语句一共有八个字（假）

显然，（1）和（2）不是同一命题，因为同一命题不会既真又假。

（3）雪是白的，并且前面那句话有四个字（真）

（4）雪是白色的，并且前面那句话有四个字（假）

语句（3）中的“前面那句话有四个字”为真，而（4）中的“前面那句话有四个字”为假，因此，它们不是同一命题。

结论：在第二类命题中，当一个语句在谈论“字数”时，如果改变被谈论语句的“字数”，则作为谈论者的语句不再是同一命题，否则它们就成了既真又假的“悖论”。

显然，在第二类命题中，当一个语句在谈论语句某一方面的属性时（例如，在前面的例子中谈论的是语句的“书写者”和“字数”），如果被谈论的语句的这一方面的属性发生改变，（前面例子中，假设被谈论的语句的“书写者”或“字数”改变）则作为谈论者的语句一定不再是同一命题，否则这“同一命题”就是既真又假的“悖论”。

（三）谈论“真值”的语句

说谎者语句，例如：本语句是假的，在谈论自身的真值，属于谈论“真值”的语句。不仅说谎者语句，其它的谈论“真值”的非自指语句也是“不正常”的，不在一阶逻辑的范围内。

直觉上，我们会认为一个命题的真假和别的命题的真假无关。由于第一类命题或一阶逻辑内的命题，谈论的对象不是语句，当然不会涉及谈论“真值”的语句，所以在一阶逻辑内，假设某个命题的真值改变，别的命题的真值不会受到影响，它们还是原来的命题。因此，这个直觉在一阶逻辑范围内是成立的。

比较：雪是白的，并且马是动物。

并非雪是白的，并且马是动物。

第一个支命题由 P 替换为 $\neg P$ ，第二个支命题（马是动物）的真值不会改变，因为第二

个支命题谈论的对象不是第一个支命题的真值，其真假和第一个支命题的真值无关。

但是一个语句谈论的对象恰好是语句的“真值”时，情况就不同了。

在前面我们分析了蕴析律： $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ 的一个反例

(1) 如果雪是白的，那么前面那句话是真的。 (真)

(2) 并非雪是白的，或前面那句话是真的。 (假)

语句(1)中“前面那句话是真的”的谈论对象是“雪是白的”(p)，语句(2)中“前面那句话是真的”的谈论对象是“并非雪是白的”($\neg p$)，同一命题不会既真又假，所以，这两句中的“前面那句话是真的”不是同一命题。这意味着：在第二类命题中，当一个语句谈论语句的真值时，假设被谈论的语句的真值为真或为假这两种情况下，作为谈论者的语句不再是同一命题。否则，语句(1)和(2)中的“前面那句话是真的”就成了既真又假的“悖论”性语句。

我们可以这样理解：语句(1)中的“前面那句话是真的”在断言其主词(前面那句话)的指称对象(雪是白的)具有“真的”属性。语句(2)中的“前面那句话是真的”在断言其主词(前面那句话)的指称对象(并非雪是白的)具有“真的”属性。但是，(1)和(2)中主词(前面那句话)指称的对象的真值属性已经改变，所以，语句(1)和(2)中的“前面那句话是真的”不是同一命题。

在第二类命题中，谈论真值的语句和别的语句不同，假设被谈论的语句的真值改变，则作为谈论者的语句不再是同一命题。第一类命题或一阶逻辑并不具备这样的性质。说谎者悖论属于谈论“真值”的语句，其推理过程显然没有注意到这个性质。

分析下面这个版本的说谎者悖论：

A、下面这句话是真的

B、上面这句话是假的

(1) 假设 A 是真的，则 B 是真的……

(2) 假设 A 是假的，则 B 是假的……

显然，A 和 B 是谈论“真值”的语句，在推理过程中，假设 A 为真和假设 A 为假这两种情况下，由于 B 在谈论 A 的真值，所以推理(1)和(2)中的 B 不再是同一命题。或者，在推理过程中，B 的真值发生改变，推理(1)和(2)中的 A 不再是同一命题。这样就推不出矛盾。

在说谎者悖论的推理过程中，我们误以为第二类命题和第一类命题具有同样的性质，在假设被谈论的语句的真值改变时，作为谈论者的语句被当作同一个命题，这是不合理的，这就是说谎者悖论最根本的原因。

逻辑学家普遍认为“本语句是真的”是一个正常的语句，但是按照本文的分析，它同样是“不正常的”，因为在假设它为真和假设它为假这两种情况下，它是不同的命题。

哥德尔不完全性定理的证明假设了第二类命题和第一类命题具有同样的性质，这是不合理的。其推理过程中的“哥德尔语句”由真推出假的过程也是不合理的，因为命题的真值发

生改变，则谈论它的不再是同一命题。当然，任一混淆了第二类命题和第一类命题的证明都是不合理的。

（四）谈论“空间位置”的语句

直觉上，我们会认为一个语句的真假和这个语句出现的空间位置无关。例如：雪是白的，这个语句不管是张贴在墙上，还是放在书桌上，它总是真的。

在第二类命题中，这个直觉并不总是真的。例如，两张纸上分别写着下面的语句：

（1）本语句张贴在墙上。

（2）雪是白的，并且前面那句话张贴在墙上。

如果（1）被张贴在墙上，则它是真的；如果（1）被放在桌子上，则它是假的。显然，这两种情况下，（1）表达的不是同一个命题。同样的分析适用于（2）。

（五）谈论“书写时间”的语句

直觉上，我们会认为书写一个语句的时间和该语句的真假无关。例如：雪是白的，这个语句不管是哪天写的，它总是真的。

在第二类命题中，我们能找到反例：

（1）本语句是 2019 年 7 月 29 日写的

（2）雪是白的，并且前面那句话是 2019 年 7 月 29 日写的

如果（1）是在 2019 年 7 月 29 日写的，则为真；如果是在别的日期写的，则为假。在这两种情况下，（1）表达的不是同一个命题。同样的分析适用于（2）。

（六）谈论“语言表达方式”的语句

《悖论简史——哲学和心灵的迷宫》一书的中译本序言中提到，哲学家 W.D.哈特（W.D. Hart）是“翻译之谜”的发现者。

W.D.哈特发现“本语句是用中文写的”这样的语句不能被正确翻译。

考虑：

A，本语句是用中文写的 （真）

如果翻译为：This sentence is written in Chinese （假）

一个真语句被翻译成了假语句。

如果翻译为：This sentence is written in English （真）

则改变了原语句的意思。

如果翻译为：The sentence A is written in Chinese （真）

则漏掉了语句自我谈论的性质，造成语义的缺失。

但是 W.D.哈特没有注意到“雪是白的，并且前面那句话是用中文写的”这样的非自指语句也不能被正确翻译。

考虑：

B，雪是白的，并且前面那句话是用中文写的 （真）

如果翻译为：Snow is white, and the previous sentence is written in Chinese （假）

一个真语句被翻译成了假语句。

如果翻译为：Snow is white, and the previous sentence is written in English （真）

则改变了原语句的意思。

这样的语句不能被正确翻译的原因是：这样的语句谈论的是语句的“语言表达方式”而翻译要改变语句的“语言表达方式”，导致作为谈论者的语句在翻译前后不再是同一命题。

当然，语句可以谈论语句各方面的属性，从而表现出各种不同的奇特性质。由于语句的属性是很多的，这里就只能分析其中的一部分了。

四 “指称”的误用

人们一般认为“A，本语句是用中文写的”是一个自指命题。也就是说，人们认为 A 在指称 A。

同理可得：

B，雪是白的，并且 C，前面那句话是用中文写的

命题 C 在指称命题 B。

实际上，这样的用法是对“指称”的误用。严格说来，我们应该如此表述：命题 A 是一个自我谈论的命题，命题 C 在谈论命题 B。

本文认为：

“指称”是语词或概念的功能（从谓词逻辑的角度看，“指称”由个体词完成）

“谈论”是语句或命题的功能

1，“指称”是语词或概念的功能

例如：

可以说：我们用“北京”这个词指称那座城市

但是不能说：我们用“北京”这个词谈论那座城市（当我们说“北京”这个词的时候，我们并没有谈论北京的任何方面）

显然，“谈论”不是语词的功能。

分析下面的例子：

A，雪是白的，并且 B，前面那句话是用中文写的

首先，把命题 B 的谓词遮住，得到：

A，雪是白的，并且 B，前面那句话是（ ）

在不知道谓词的情况下，我们依然可以断定命题 B 在指称命题 A。

其次，把命题 B 的主词遮住，得到：

A，雪是白的，并且 B，（ ）是用中文写的

在不知道主词的情况下，我们无法判断命题 B 在指称谁。

这说明，“命题 B 指称命题 A”是由 B 的主词完成的。“命题 B 指称命题 A”的实际涵义是：命题 B 的主词“前面那句话”指称命题 A，因为谓词（用中文写的）的缺失对指称没有造成任何影响。

2，“谈论”是语句或命题的功能

分析：

A，雪是白的，并且 B，前面那句话是用中文写的。

我们不能说：“命题 B 的主词“前面那句话”在谈论命题 A”（因为它只进行了指称）也不能说：“命题 B 的谓词“用中文写的”在谈论命题 A”（在只有谓词的情况下，我们甚至不能确定其谈论的对象），所以，是整个命题 B 在谈论命题 A，但是只有命题 B 的主词在指称命题 A。

“指称”和“谈论”是不同的概念。语词在“指称”时，没有作任何断定，命题在“谈论”时，作了断定。这是“指称”和“谈论”的一个重要区别。

当然，命题在谈论时，其主词也同时进行了指称。但是，命题的功能是谈论，命题的主词的功能才是指称。

因此，以下的陈述是不准确的：

“本语句是用中文写的”是一个自指命题。

“禁止命题的自我指称”

.....

应该严格表述为：

“本语句是用中文写的”是一个自我谈论的命题。

“禁止命题的自我谈论”

.....

显然，“谈论”是命题的一个重要功能。本文按照命题的“谈论对象”来对命题进行分类是必要的。

五 新的真值分类

在第二类命题中，我们能发现真值有不同的类型。下面对比第一类命题和第二类命题。

第一类命题：谈论的对象不是命题

例如：

A，雪是白的。

推理：如果 A 是真的，那么 A 所说的就与实际相符，既然它说“雪是白的”，那么雪就是白色的。

命题 A 在谈论“雪”这个对象，所以，它是谈论者，并且只能是谈论者，因为在第一类命题中不存在被谈论的命题。在第一类命题中，假设某个命题为真时，这个命题只能作为谈论者真。

第二类命题：谈论的对象是命题（或语句）

例如：

A，雪是白的。 B，前面那句话是用中文写的

B 这个命题在谈论 A 这个命题，即：B 是谈论者，A 是被谈论者。

在谈论命题的命题中存在：

- 1，被谈论的命题
- 2，作为谈论者的命题

注意：这种区分只会在第二类命题中出现（因为在第一类命题中，没有命题被任何命题谈论）。

下面这个例子揭示了第二类命题中的两种真值类型和两种推理模式。

分析下面的例子：

A，雪是白的 B，前面那句话是用中文写的 C，前面第二句话是真的

在这个例子中，命题 B 在谈论 A，同时它又被 C 谈论，命题 B 既是谈论者又是被谈论者。

请仔细思考下面两个推理：

推理模式一：如果 **B** 是真的，那么 **B** 所说的就与实际相符，既然它说 **A** 是用中文写的，那么 **A** 就是用中文写的。

很容易识别，推理一中的命题 **B** 在谈论命题 **A**，**B** 是谈论者。

推理模式二：如果 **B** 是真的，那么由于 **C** 正好在说 **B** 是真的，**C** 所说的就与实际相符，所以 **C** 是真的。

推理模式二中，命题 **B** 被命题 **C** 谈论，**B** 是被谈论的命题。

推理模式一中的命题 **B** 是谈论者，而推理模式二中的命题 **B** 是被谈论者。由于它们的身份不同，如果严格区分，则推理模式一和推理模式二实际上是这样的推理：

推理模式一：如果 **B**（作为谈论者）是真的，那么 **B** 所说的就与实际相符，既然它说 **A** 是用中文写的，那么 **A** 就是用中文写的。

推理模式二：如果 **B**（作为被谈论者）是真的，那么由于 **C** 正好在说 **B** 是真的，**C** 所说的就与实际相符，所以 **C** 是真的。

在第一类命题中，所有命题都是谈论者。在这类命题中，假设一个命题为真时，只能假设这个命题作为谈论者真。也就是说，第一类命题的真值只有一种类型。但是，在第二类命题中，一个命题可以是谈论者也可以是被谈论者，因此，在第二类命题中就存在两种新的真值类型：一个命题可以作为谈论者真或作为谈论者假，也可以作为被谈论者真或作为被谈论者假。

我们不能混淆命题的谈论者和被谈论者的身份，也不能混淆不同的推理模式。

1，两者的涵义不同。在推理模式一和推理模式二中，假如交换命题 **B** 的谈论者和被谈论者的身份，那么，推理将变得不可理解。

例如，推理模式一将变成：如果 **B**（作为被谈论者）是真的，那么 **B** 所说的就与实际相符，……

2，一个命题作为谈论者真，并不意味着它作为被谈论者也是真的。

例如：**A**，雪是白的 **B**，前面那句话是真的

显然，这里 **B** 作为谈论者是真的，但是并不能由此得出 **B** 作为被谈论者也是真的，因为根本就没有命题在谈论它。

六 第二类命题的扩充

如果我们把第二类命题理解为不是一阶逻辑范围内的命题，那么第二类命题可以分为以下三类（这里并不考虑像模态命题之类的一阶逻辑范围之外的命题）：

（一）谈论概念的命题

（二）谈论命题的命题

（三）谈论推理的命题

前面已经证明了谈论命题的命题不在一阶逻辑的范围之内，下面接着证明谈论概念的命题和谈论推理的命题也不在一阶逻辑的范围之内。

（一）谈论概念（或语词）的命题

例如：“北京”是两个字。

这类命题违反外延原则。

就语词而言，外延原则说的是在某一复合语句中用具有同样指称但涵义不同的语词去替换另一语词，该复合语句的真值保持不变。

例如：北京 = 中国的首都 （这两个词的指称相同）

北京是一座美丽的城市 （真）

用具有同样指称的“中国的首都”替换“北京”

得到：

中国的首都是一座美丽的城市 （真）

替换后语句的真值不变。

但是，外延原则在谈论概念的命题中失效。欧洲中世纪逻辑学家已经知道并研究过这个问题。

例如：

“北京”是两个字。 （真）

用具有同样指称的“中国的首都”替换“北京”

得到：

“中国的首都”是两个字。 （假）

替换后命题的真值发生改变。

由于一阶逻辑预设外延原则，显然，谈论概念的命题不在一阶逻辑的范围之内。

下面分析外延原则失效的根本原因。对比分析：

（1）“北京”是两个字 （真）

（2）“中国的首都”是两个字 （假）

语句（1）在谈论自己的主词“北京”，属于谈论概念（或语词）的命题。当我们用“中国的首都”这个语词去替换“北京”得到语句（2），则这种情况下，我们改变了语句的谈论对象，所以语句（1）和（2）不再是同一命题。（1）中的谈论对象是主词“北京”，替换后谈论对象变为“中国的首都”这个语词，语句谈论的对象发生改变，所以外延原则失效。

（3）北京是一座美丽的城市 （真）

(4) 中国的首都是一座美丽的城市 (真)

语句(3)在谈论“北京”这个主词的指称对象：北京这座城市。当我们用“中国的首都”这个语词去替换“北京”得到语句(4)，则在这种情况下，虽然“北京”和“中国的首都”是不同的语词，但是它们的指称对象是相同的，因此，替换并没有改变语句谈论的对象，所以外延原则有效。

逻辑学中区分语言的“使用”与“提及”，并认为外延原则不适用于语言的“提及”。例如：“北京是一座美丽的城市”是语言的使用，“北京是两个字”是语言的提及。上面的分析能够从本质上解释外延原则不适用于语言的“提及”的原因。

分析：

(1) “北京”是两个字

(2) 北京是一座美丽的城市，并且前面那句话的主词是两个字

语句(1)在谈论语句(1)的主词，所以，我们可以把它归为谈论命题(或语句)的命题；语句(2)的后一个支命题在谈论前一个支命题的主词，所以，我们也可以把它归为谈论命题(或语句)的命题。

(三) 谈论推理的命题

例如：如果雪是白的，那么雪是白色的。并且前面那个蕴含式推理是有效的。

这样的命题不遵守合取交换律。

例如：

如果雪是白的，那么雪是白色的。并且前面那个蕴涵式推理是有效的。 (真)

合取交换后得：

前面那个蕴涵式推理是有效的。并且如果雪是白的，那么雪是白色的。 (无真值)

因为合取式的前件“前面那个蕴涵式推理是有效的”没有谈论对象。

由于这样的命题不遵守交换律，所以它们不在一阶逻辑的范围之内。

推理是由命题组成的，所以我们可以把谈论推理的命题归为谈论命题(或语句)的命题。

总之，我们对第二类命题进行的扩充，本质上都可以归为谈论命题的命题。

本文的核心内容(说谎者悖论根源于混淆了第二类命题和第一类命题的区别)的证明到此为止。

下面本文作者将尝试给出一个新的逻辑系统，这个新系统是否恰当和本文核心内容的证

明是相互独立的，有兴趣的读者可以继续往下阅读。

七 创立新的逻辑系统

前面分析过：

雪是白的，并且前面那句话是真的 （真）

前面那句话是真的，并且雪是白的 （无真值）

这样的语句不遵守合取交换律。如果我们标记出“前面那句话”的指称对象，则这样的问题将不复存在。例如：

雪是白的，并且前面那句话（雪是白的）是真的 （真）

前面那句话（雪是白的）是真的，并且雪是白的 （真）

我们也可以用同样的方法来处理前面分析过的外延原则失效的问题：

（1）雪是白的，并且前面那句话有四个字 （真）

用同样为真的“北京是中国的首都”替换“雪是白的”，得到：

（2）北京是中国的首都，并且前面那句话有四个字 （假）

替换后复合命题由真变假。外延原则失效。

标记出（1）中“前面那句话”的指称对象，可得：

（3）雪是白的，并且前面那句话（雪是白的）有四个字 （真）

用同样为真的“北京是中国的首都”替换“雪是白的”，得到：

（4）北京是中国的首都，并且前面那句话（雪是白的）有四个字 （真）

外延原则有效。

本文前面分析过的例子都可以用这样的方法解决。

事实上，把被谈论的命题标记在作为谈论者的命题内，相当于割断了它们之间的联系，这样就可以把第二类命题化归为第一类命题。下面的新逻辑系统就建立在给命题作标记的基础上。

（一）新命题演算

（甲） 语法部分

1， 初始符号

（1）命题变元：p, q, r, s, p_1 ……

（2）被谈论者符号：【 】Y, 【 】Z, 【 】Y1, ……

（3）特殊谓词变元：F, G, F_1 ……

(4) 命题连结词： $\neg$ ， $\rightarrow$

(5) 括号：(,)

2, 形成规则

(1) 初始符号 (1) 中的任一符号是一合式公式。

(2) 如果 A 是合式公式，则 $\mathbf{[A]Y}$ 是特殊合式公式。

(3) 如果 $\mathbf{[A]Y}$ 是特殊合式公式，并且 F 是任一特殊谓词，则 $F \mathbf{[A]Y}$ 是合式公式。

(4) 如果 A 是合式公式，则 $\neg A$ 是合式公式。

(5) 如果 A 和 B 是合式公式，则 $(A \rightarrow B)$ 是合式公式。

(6) 只有符合以上五条的符号序列是合式公式。

说明： $A, B, \dots$ 是元语言符号，在形成规则中，它们的值是任一符号序列；在定义、公理、推理规则或证明中，它们的值是任一合式公式。

3, 定义

(1): $(A \vee B) = (\neg A \rightarrow B)$

(2): $(A \wedge B) = \neg (A \rightarrow \neg B)$

(3): $(A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

4, 公理模式 ($\vdash$ 表示跟在其后的公式是本系统要肯定的)

(1) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

5, 推理模式 (分离模式)

从 $A \rightarrow B$ 和 A , 可以推出 B 。

(乙) 语义部分

1、初始符号 (1) 中的符号是命题变元。

2、初始符号 (2) 中的符号用来标记命题。例如，用 $\mathbf{[]Y}$ 标记命题 A ，得到 $\mathbf{[A]Y}$ ，表示 A 这个命题被谈论，并把被谈论的命题标记在作为谈论者的命题之内， Y 用来标记正在谈论命题某一方面的属性。

例如： A ，雪是白的 B ，前面那句话 $\mathbf{[A]Y}$ 有四个字

其中： Y 表示谈论的是“雪是白的”这个命题的“字数”这一属性。在不引起混淆的情况下， $\mathbf{[]Y}$ 可以写为 $\mathbf{[]}$ 。

3、初始符号 (3) 中的特殊谓词变元 (用黑体表示) 是可以用来谈论命题或推理的谓词。

例如：“雪是白的，并且前面那句话是用中文写的”中的“……是用中文写的”是一特殊谓词。

4、初始符号 (4) 中的符号是真值联结词。其解释和一阶逻辑相同：

$\underline{A} \quad \neg A \qquad \underline{A} \quad B \quad (A \rightarrow B)$

真	假	真	真	真
假	真	真	假	假
		假	真	真
		假	假	真

真值联结词的结合能力从强到弱依次为： $\neg$ ， $\wedge$ ， $\vee$ ， $\rightarrow$ ， $\leftrightarrow$

5、初始符号（5）分别是左右括号。公式最外层的括号可以省略。

6、形成规则（3）中的 **F【A】** 表示被谈论的命题 **A** 是 **F**。

例如：**F**：……有四个字，**A**：雪是白的

F【A】：被谈论的命题“雪是白的”有四个字。

下面分析如何把新命题演算中新出现的命题化归为一阶命题演算中的命题。

考虑：

雪是白的，并且前面那句话【雪是白的】是真的。

形式化为： $p \wedge Z【p】$ 可以读作 p 并且被谈论的 p 是真的。

其中： Z 是特殊谓词，涵义是：……是真的。

注意： $Z【p】$ 不是两个命题，它只相当于一个命题变元，它的值或真或假。

$Z【p】$ ：前面那句话【雪是白的】是真的，是一个谈论命题的命题。由于作了标记，其真值和 $p \wedge Z【p】$ 中的第一个支命题 P 没有关系，而 $Z【p】$ 相当于一个命题变元，其值或真或假。如果它在证明中出现，那么把它的每一处出现都改写为同一个命题变元。这样就可以把这类命题化归为一阶逻辑的命题。

例如：把 $p \wedge Z【p】$ 改写为： $p \wedge q$

显然，这样改写后，这类命题遵守一阶逻辑的规律。

由于本系统中的公理是公理模式，所以把 $Z【p】$ 改写为命题变元是合法的。如果系统不用公理模式，而是用一些重言式作为公理，则可使用命题变元代入规则把 $Z【p】$ 改成命题变元。

（丙）新命题演算中的证明

新系统中出现的新的合式公式或者为真或者为假，所以新系统中的重言式的定义与一阶逻辑系统一样。

按照上面的方法，把新出现的合式公式改为（1）中的命题变元，把新命题演算中的合式公式转换为一阶命题演算中的合式公式。这样，新命题演算中的证明就转换成一阶命题演算中的证明。

（丁）新命题演算的元定理

用上面的方法，把新命题演算中的合式公式转换为一阶命题演算中的合式公式。这样，新命题演算中元定理的证明就转换成一阶命题演算中元定理的证明。显然，新命题演算具有一阶命题演算的所有元逻辑性质。

下面举例分析第二类命题的符号化。

（1）谈论“真值”的命题

雪是白的，并且前面那句话【雪是白的】是真的。

形式化为： $p \wedge Z【p】$ 可以读作： p 并且被谈论的 p 是真的。

其中： Z 是特殊谓词，涵义是：……是真的。

雪是白的，并且前面那句话【雪是白的】是假的。

形式化为： $p \wedge J【p】$ 可以读作： p 并且被谈论的 p 是假的。

其中： J 是特殊谓词，涵义是：……是假的。

（2）谈论“语言表达方式”的命题

雪是白的，并且前面那句话【雪是白的】是用中文写的。

形式化为： $p \wedge H【p】$ 可以读作： p 并且被谈论的 p 是用中文写的。

其中： H 是特殊谓词，涵义是：……是用中文写的。

雪是白的，并且前面那句话【雪是白的】有四个字。

形式化为： $p \wedge S【p】$ 可以读作： p 并且被谈论的 p 有四个字。

其中： S 是特殊谓词，涵义是：……有四个字。

（3）谈论“空间位置”的命题

雪是白的，并且前面那句话【雪是白的】张贴在墙上。

形式化为： $p \wedge Q【p】$ 可以读作 p 并且被谈论的 p 张贴在墙上。

其中： Q 是特殊谓词，涵义是：……张贴在墙上。

（4）谈论“书写时间”的命题

雪是白的，并且前面那句话【雪是白的】是 7 月 29 日写的。

形式化为： $p \wedge Y【p】$ 可以读作 p 并且被谈论的 p 是 7 月 29 日写的。

其中： Y 是特殊谓词，涵义是：……是 7 月 29 日写的。

（5）谈论推理的命题

如果雪是白的，那么雪是白色的。并且前面那个蕴含式推理【如果雪是白的，那么雪是白色的】是有效的。

形式化为： $(p \rightarrow p) \wedge X[p \rightarrow p]$ 可以读作 如果 p 那么 p，并且被谈论的“如果 p 那么 p”是有效的。

其中：X 是特殊谓词，涵义是：……有效的。

(二) 新谓词演算

(甲) 语法部分

1, 初始符号

- (1) 个体变元: $u, v, w, x, y, z, u_1, \dots$
- (2) 个体常元: $a, b, c, d, a_1, \dots$
- (3) 函数符号: $f, g, f_1, \dots$
- (4) 一般谓词变元: $F, G, F_1, \dots$
- (5) 特殊谓词变元: $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{F}_1, \dots$
- (6) 命题变元: $p, q, r, s, p_1, \dots$
- (7) 被谈论者符号: $\mathbf{[]}Y, \mathbf{[]}Z, \mathbf{[]}Y_1, \dots$
- (8) 命题连结词: $\neg, \rightarrow$
- (9), 量词符号: $\forall$
- (10) 括号: $(,)$

注: 在不引起混淆的情况下, $\mathbf{[]}Y$ 可以写为 $\mathbf{[]}$ 。

2, 形成规则

- (1) 初始符号 (1) 中的任一符号是一个项。
- (2) 初始符号 (2) 中的任一符号是一个项。
- (3) 如果 t_i 是项, 则 $\mathbf{[t_i]}Y$ 是项。
- (4) 如果 f 是一 n 元函数符号, 并且 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是项, 则 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项。
- (5) 初始符号 (6) 中的任一符号是合式公式。
- (6) 如果 F 是一 n 元一般谓词变元, 并且 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是项, 则 $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是合式公式。
- (7) 如果 $\mathbf{F}$ 是一 n 元特殊谓词变元, 并且 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是项, 则 $\mathbf{F}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是合式公式。
- (8) 如果 A 是合式公式, 则 $\mathbf{[A]}Y$ 是项。
- (9) 只有符合以上 (1)、(2)、(3)、(4)、(8) 的才是项。

- (10) 如果 **【A】Y** 是项，并且 **F** 是任一特殊谓词，则 **F【A】Y** 是合式公式。
- (11) 如果 **A** 是合式公式，则 $\neg A$ 是合式公式。
- (12) 如果 **A** 和 **B** 是合式公式，则 $(A \rightarrow B)$ 是合式公式。
- (13) 如果 **A** 是合式公式，并且 **x** 是个体变元，则 $\forall xA$ 是合式公式。
- (14) 只有符合以上 (5)、(6)、(7)、(10)、(11)、(12)、(13) 的才是合式公式。

3, 定义

- (1): $(A \vee B) = (\neg A \rightarrow B)$
- (2): $(A \wedge B) = \neg (A \rightarrow \neg B)$
- (3): $(A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- (4): $\exists xA = \neg \forall x \neg A$

4, 公理模式 ($\vdash$ 表示跟在其后的公式是本系统要肯定的)

- (1) $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (2) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (3) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
- (4) $\vdash \forall xA \rightarrow A(x/t)$ (t 对于 A 中的 x 是自由的)
- (5) $\vdash A \rightarrow \forall xA$ (x 不在 A 中自由出现)
- (6) $\vdash \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$

推理模式 (分离模式): 从 $A \rightarrow B$ 和 A , 可以推出 B 。

推理模式 (全称概括): 从 $A \rightarrow B$ 可以推出 $A \rightarrow \forall xB$, 如果个体变元 x 不在结论中出现。

(乙) 语义部分

只解释与新命题演算和一阶谓词演算不同的部分。

1, **【t_i】Y** 是一个项。

其中: **【t_i】** 表示谈论的是 t_i 这个概念或语词本身。**Y** 用来标记被谈论的某一方面的属性。

2, 特殊谓词变元: **F, G, F₁……** (用黑体表示) 是可以用来谈论概念、命题或推理的谓词。

3, **F【t_i】Y** 是一合式公式。

例如, t_i : 北京 **F**: 是两个字

则, **F【t_i】Y** 表示: 北京是两个字。这是一个真命题。

Y: 表示谈论的是“北京”这个语词的中文字数。

对比: t_j : 中国的首都 **F**: 是两个字

则, $F[t_i]Y$ 表示: 中国的首都是两个字。这是一个假命题。

Y : 表示谈论的是“中国的首都”这个语词的中文字数。

(丙) 新谓词演算中的证明

由于新谓词演算中的 $[t_i]Y$ 是一个项。如果 t_i 是个体常元, 则把 $[t_i]Y$ 改写为新的个体常元。如果 t_i 是个体变元, 则把 $[t_i]Y$ 改写为新的个体变元。再加上新命题演算中还原命题的方法, 就可以把新谓词演算的公式还原为一阶谓词演算的公式, 把新谓词演算的证明化归为一阶谓词演算的证明。

(丁) 新谓词演算的元定理

同样, 可以把新谓词演算的元定理的证明化归为一阶谓词演算元定理的证明。显然, 新谓词演算具有一阶谓词演算的所有元逻辑性质。

参考文献:

- [1] 陈波. 逻辑哲学[M]. 北京: 北京大学出版社. 2005.
- [2] 苏珊. 哈克. 逻辑哲学[M]. 罗毅 译. 北京: 商务印书馆. 2003.
- [3] 陈波. 悖论研究[M]. 北京: 北京大学出版社. 2014.
- [4] 张建军. 逻辑悖论研究引论[M]. 南京: 南京大学出版社. 2002.
- [5] 韩雪涛. 数学悖论与三次数学危机. [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社. 2006.
- [6] (英) 罗伊. 索伦森. 悖论简史[M]. 贾红雨 译. 北京: 北京大学出版社. 2007.
- [7] 陈波. 逻辑学导论[M]. 北京: 中国人民大学出版社. 2014.
- [8] 王路. 逻辑基础[M]. 北京: 人民出版社. 2013.
- [9] 王宪均. 数理逻辑引论[M]. 北京: 北京大学出版社. 1982.
- [10] 陈慕泽. 数理逻辑教程[M]. 上海: 上海人民出版社. 2001.

A New Logic System

--Based On the Research Turning of the Liar paradox

(Kunming Feng Qingcai 650222)

Abstract : The author of this paper has discovered a new kind of proposition, and has initially created a new logic system. The fundamental reason for the liar paradox is confusion of two different propositions, confusion of two different logic systems. The research on the liar paradox should be changed into the research on the new logic system. Only in this way can we resolve the problem of the liar paradox eventually.

Key words: The liar paradox. New Classification of propositions. A new logic system.