On the Relation Between Condensed Matrix and Its Determinant

Victor Leighton Inostroza

September 13, 2021

SOBRE LA RELACIÓN ENTRE MATRIZ CONDENSADA Y SU DETERMINANTE

Victor Leighton Inostroza[(1)] *– vleightoni@gmail.com*

(1) Ingeniero Civil y Desarrollador de Software – Grupo GDES.ie, Santiago-Chile

Resumen.

En el presente trabajo se establecen relaciones para el cálculo de determinantes, utilizando una técnica algebraica de la Ingeniería Sísmica denominado ***"Condensación Estática"***, el cual es un proceso de reducción por bloques, del orden n de la matriz de rigidez K_n.

A través de un enfoque inverso, se aplica $(n-1)$ veces el proceso de condensación hasta obtener la máxima condensación posible K^c (matriz de 1x1), llegando a una relación entre los determinantes de las matrices K_n, de la submatriz K_{n-1} y K^c.

Se establece finalmente una relación entre el determinante de K_n, el determinante de una de sus condensadas intermedias simples K_p^* y las sub-condensadas principales simples k_i^*.

Contexto General:

La relación básica utilizada es:

$$K_i^c = A_i - B_i D_i^{-1} C_i$$

(*) Donde i representa el paso de condensación, con: $1 \leq i \leq n-1$

cuyo origen se debe al trabajo de Robert J. Guyan[1] de 1965, por lo cual también es denominada ***"reducción de Guyan"***, donde las matrices $A_i, B_i, C_i \; y \; D_i$ representan submatrices de la matriz original K_n, de acuerdo al siguiente esquema:

$$K_n = \left[\begin{array}{ccc:ccc} a_1 & & & b_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_q & & & b_r \\ \hdashline c_1 & & & d_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & c_s & & & d_t \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_i & B_i \\ \hdashline C_i & D_i \end{array}\right]$$

(*) Las matrices A_i y D_i son cuadradas, no necesariamente del mismo orden.
(*) Las matrices B_i y C_i no necesariamente son cuadradas ni del mismo orden.

[1] Robert J. Guyan, Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA Journal Vol. 3 N° 2, 1965.

Enfoque General (utilizado en Ingeniería Sísmica):

El método consiste en identificar los GDL dinámicos y ordenarlos adecuadamente en las primeras filas y columnas de la matriz de rigidez, tal que se correspondan con la submatriz cuadrada A_i.

Una vez identificada A_i, se identifica D_i como la matriz cuadrada que continúa por la diagonal a la matriz A_i y que completa el orden de la matriz K_n original, procediendo de esta manera a determinar D_i^{-1} para realizar el cálculo de la relación básica de condensación, cuyo resultado es la matriz de rigidez condensada a los GDL dinámicos horizontales, K^c.

Enfoque inverso del presente trabajo:

Considerar a la matriz D_i como el elemento k_{nn}, con tal de aplicar la relación de condensación sin necesidad de calcular matrices inversas, sino solo dividiendo por dicho elemento en cada paso.

Desarrollo del Procedimiento Inverso:

Se aplica el enfoque inverso $(n-1)$ veces hasta obtener la máxima condensación de la matriz original. En el desarrollo se observa la aparición de un patrón en cada condensada, del cual se obtiene una primera relación entre la condensada máxima completa K_{n-1}^c y la condensada máxima simple K_{n-1}^*.

Se realiza el desarrollo con una matriz de orden 4 (K_4) para ejemplificar.

$$K_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & & b_1 \\ & \ddots & & \\ & & a_{33} & b_3 \\ \hline c_1 & & c_3 & d \end{array}\right]$$

En este caso las matrices B_i y C_i son vectores (columna y fila respectivamente).

$K_i^c = A_i - B_i D_i^{-1} C_i$

$K_1^c = A_1 - (B_1 C_1) D_1^{-1}$ (dado que D_i es de orden 1, es tratado como número, por ende puede conmutar en la multiplicación matricial).

Trabajando sobre el paréntesis $(B_1 C_1)$:

$B_1 C_1 = [c_1 * \{B_1\} \mid c_2 * \{B_1\} \mid c_3 * \{B_1\}]$

$\{B_1\} = \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix}$ $\{C_1\} = [k_{41} \quad k_{42} \quad k_{43}]$

$$B_1 C_1 = \left[k_{41} * \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} \middle| \; k_{42} * \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} \middle| \; k_{43} * \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} \right]$$

Incorporando ahora el resto de elementos a la ecuación de condensación:

$$K_1^c = A_1 - (B_1 C_1) D_1^{-1} \qquad \text{Con: } D_1 = d = k_{44}$$

Donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$K_1^c = \begin{bmatrix} k_{11} - \frac{k_{41}k_{14}}{k_{44}} & k_{12} - \frac{k_{42}k_{14}}{k_{44}} & k_{13} - \frac{k_{43}k_{14}}{k_{44}} \\ k_{21} - \frac{k_{41}k_{24}}{k_{44}} & k_{22} - \frac{k_{42}k_{24}}{k_{44}} & k_{23} - \frac{k_{43}k_{24}}{k_{44}} \\ k_{31} - \frac{k_{41}k_{34}}{k_{44}} & k_{32} - \frac{k_{42}k_{34}}{k_{44}} & k_{33} - \frac{k_{43}k_{34}}{k_{44}} \end{bmatrix}$$

(*) Considerando $k_{44} \neq 0$.
(*) Designando K_1^c como la condensada de paso 1, o la primera condensación.

$$K_1^c = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}k_{44} - k_{41}k_{14}}{k_{44}} & \frac{k_{12}k_{44} - k_{42}k_{14}}{k_{44}} & \frac{k_{13}k_{44} - k_{43}k_{14}}{k_{44}} \\ \frac{k_{21}k_{44} - k_{41}k_{24}}{k_{44}} & \frac{k_{22}k_{44} - k_{42}k_{24}}{k_{44}} & \frac{k_{23}k_{44} - k_{43}k_{24}}{k_{44}} \\ \frac{k_{31}k_{44} - k_{41}k_{34}}{k_{44}} & \frac{k_{32}k_{44} - k_{42}k_{34}}{k_{44}} & \frac{k_{33}k_{44} - k_{43}k_{34}}{k_{44}} \end{bmatrix}$$

$$K_1^c = \left(\frac{1}{k_{44}}\right) * \begin{bmatrix} k_{11}k_{44} - k_{41}k_{14} & k_{12}k_{44} - k_{42}k_{14} & k_{13}k_{44} - k_{43}k_{14} \\ k_{21}k_{44} - k_{41}k_{24} & k_{22}k_{44} - k_{42}k_{24} & k_{23}k_{44} - k_{43}k_{24} \\ k_{31}k_{44} - k_{41}k_{34} & k_{32}k_{44} - k_{42}k_{34} & k_{33}k_{44} - k_{43}k_{34} \end{bmatrix}$$

$$K_1^c = \left(\frac{1}{k_{44}}\right) * K_1^*$$

(*) La matriz de la derecha (K_1^*) se denominará ***Matriz Condensada Simple*** de paso 1, del mismo orden que la Matriz Condensada Completa de paso 1 (K_1^c).

Se observa que cada elemento de K_1^* se asemeja a un determinante de orden 2, siguiendo un patrón geométrico en forma de cuadrados y rectángulos, con el elemento "ancla" k_{44} como referencia, según los siguientes esquemas:

$$K_4 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & \boldsymbol{k_{44}} \end{bmatrix} \qquad K_1^* = \begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* & k_{13}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* & k_{32}^* \\ k_{31}^* & k_{32}^* & k_{33}^* \end{bmatrix}$$

$$k_{11}^* = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{14} \\ k_{41} & k_{44} \end{vmatrix} \qquad k_{12}^* = \begin{vmatrix} k_{12} & k_{14} \\ k_{42} & k_{44} \end{vmatrix} \qquad k_{13}^* = \begin{vmatrix} k_{13} & k_{14} \\ k_{43} & k_{44} \end{vmatrix}$$

$$k_{21}^* = \begin{vmatrix} k_{21} & k_{24} \\ k_{41} & k_{44} \end{vmatrix} \qquad k_{22}^* = \begin{vmatrix} k_{22} & k_{24} \\ k_{42} & k_{44} \end{vmatrix} \qquad k_{23}^* = \begin{vmatrix} k_{23} & k_{24} \\ k_{43} & k_{44} \end{vmatrix}$$

$$k_{31}^* = \begin{vmatrix} k_{31} & k_{34} \\ k_{41} & k_{44} \end{vmatrix} \qquad k_{32}^* = \begin{vmatrix} k_{32} & k_{34} \\ k_{42} & k_{44} \end{vmatrix} \qquad k_{33}^* = \begin{vmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{vmatrix}$$

Se introduce la siguiente notación para estos determinantes (2x2), de acuerdo a la figura que representen:

- ***Cuadrados***: se denominarán ***expansivos*** y se identificarán por la letra e con índices.
- ***Rectangulares***: diferenciados entre ***verticales y laterales***, según su orientación, se identificarán por la letra r con índices.

e^1 : primer determinante cuadrado (expansivo), primera condensación
r_1 : primer determinante rectangular lateral, primera condensación
r^1 : primer determinante rectangular vertical, primera condensación
r_1^2 : determinante rectangular (2 vertical, 1 lateral), primera condensación
e_2^1 : primer determinante cuadrado, segunda condensación
$(r^1)_2$: primer determinante rectangular vertical, segunda condensación
$(r_1)_2$: primer determinante rectangular lateral, segunda condensación

Todos toman como referencia al elemento "ancla" k_{44} y comienzan a contar desde el.

Continuando el desarrollo previo:

$$K_1^c = \left(\frac{1}{k_{44}}\right) * \begin{bmatrix} k_{11}k_{44} - k_{41}k_{14} & k_{12}k_{44} - k_{42}k_{14} & k_{13}k_{44} - k_{43}k_{14} \\ k_{21}k_{44} - k_{41}k_{24} & k_{22}k_{44} - k_{42}k_{24} & k_{23}k_{44} - k_{43}k_{24} \\ k_{31}k_{44} - k_{41}k_{34} & k_{32}k_{44} - k_{42}k_{34} & k_{33}k_{44} - k_{43}k_{34} \end{bmatrix}$$

$$K_1^c = \left(\frac{1}{k_{44}}\right) * K_1^*$$

Incorporando la notación reducida para los determinantes expansivos y rectangulares, la relación anterior queda:

$$K_1^* = \begin{pmatrix} e^3 & r_1^2 & r^2 \\ r_2^1 & e^2 & r^1 \\ r_2 & r_1 & e^1 \end{pmatrix} \qquad K_1^c = \left(\frac{1}{k_{44}}\right) * K_1^*$$

con: $e^1 = k_{44} * k_{33} - k_{43} * k_{34}$ $\qquad k_1^* = e^1$

Continuando el desarrollo de la condensada, ahora sobre K_1^*, segunda iteración:

$$K_2^* = \begin{pmatrix} e_2^2 & (r^1)_2 \\ (r_1)_2 & e_2^1 \end{pmatrix} \qquad K_2^c = \left(\frac{1}{k_{44} * e^1}\right) * K_2^*$$

$$e_2^1 = e^1 * e^2 - r_1 * r^1 \qquad k_2^* = e_2^1$$

Tercera iteración, sobre K_2^*:

$$K_3^* = (e_3^1) \qquad K_3^c = \left(\frac{1}{k_{44} * e^1 * e_2^1}\right) * K_3^*$$

$$e_3^1 = e_2^1 * e_2^2 - (r_1)_2 * (r^1)_2 \qquad k_3^* = e_3^1$$

Considerando que $k_0^* = k_{44}$, se observa el siguiente patrón:

$$K_3^c = \left(\frac{1}{k_0^* * k_1^* * k_2^*}\right) * K_3^*$$

Generalizando se obtiene:

$$\boxed{K_p^c = \frac{K_p^*}{\prod_{i=0}^{p-1} k_i^*}} \qquad \text{Con:} \quad 1 \le p \le n-1 \text{ , } p \in \mathbb{N};\ k_i^* \neq 0$$

Relación Fundamental (1)

Donde las k_i^* corresponden a los determinantes expansivos de la primera esquina (inferior derecha), de cada matriz condensada, de los pasos sucesivos, y la K_{n-1}^* es la condensada simple máxima obtenida para la matriz K_n original.

Se puede decir que las k_i^* son las sub-condensadas simples principales, mientras que la K_{n-1}^* es la condensada simple máxima principal.

Relaciones que involucran al Determinante

Relación Fundamental (2):

Comenzando con una matriz (2x2), $n = 2$:

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{con } k_{22} \neq 0$$

$$K_i^c = A_i - B_i * D_i^{-1} * C_i \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

$$K_1^c = A_1 - B_1 * C_1 * D_1^{-1}$$

$$K_1^c = k_{11} - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}$$

$$K_1^c = \frac{k_{22}k_{11} - k_{12}k_{21}}{k_{22}}$$

$$K_1^c = \frac{det(K_2)}{det(\overline{K}_1)}$$

con $\overline{K}_1 = submat(n-1,\ K_n)$

Ahora, considerando una matriz (3x3):

$$K_3 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{con } k_{33} \neq 0$$

$$K_i^c = A_i - B_i * C_i * D_i^{-1} \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

$$K_1^c = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k_{31} & k_{32} \end{pmatrix} * \frac{1}{k_{33}}$$

$$= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} - \left(k_{31} * \begin{pmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{pmatrix} \quad k_{32} * \begin{pmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{pmatrix} \right) * \frac{1}{k_{33}}$$

$$= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_{31}k_{13} & k_{32}k_{13} \\ k_{31}k_{23} & k_{32}k_{23} \end{pmatrix} * \frac{1}{k_{33}}$$

$$= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{k_{31}k_{13}}{k_{33}} & \frac{k_{32}k_{13}}{k_{33}} \\ \frac{k_{31}k_{23}}{k_{33}} & \frac{k_{32}k_{23}}{k_{33}} \end{pmatrix}$$

$$K_1^c = \begin{pmatrix} \frac{k_{33}k_{11} - k_{31}k_{13}}{k_{33}} & \frac{k_{33}k_{12} - k_{32}k_{13}}{k_{33}} \\ \frac{k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23}}{k_{33}} & \frac{k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23}}{k_{33}} \end{pmatrix}$$

Iterando la condensación sobre la condensada K_1^c:

$$K_1^c = \begin{pmatrix} \dfrac{k_{33}k_{11} - k_{31}k_{13}}{k_{33}} & \dfrac{k_{33}k_{12} - k_{32}k_{13}}{k_{33}} \\ \dfrac{k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23}}{k_{33}} & \dfrac{k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23}}{k_{33}} \end{pmatrix}$$

$$K_i^c = A_i - B_i * C_i * D_i^{-1} \qquad 1 \le i \le n-1$$

$$K_2^c = \frac{k_{33}k_{11} - k_{31}k_{13}}{k_{33}} - \left(\frac{k_{33}k_{12} - k_{32}k_{13}}{k_{33}}\right)\left(\frac{k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23}}{k_{33}}\right) * \frac{k_{33}}{k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23}}$$

$$= \frac{k_{33}k_{11} - k_{31}k_{13}}{k_{33}} - \left(\frac{k_{33}k_{12} - k_{32}k_{13}}{k_{33}}\right)\left(\frac{k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23}}{k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23}}\right)$$

$$= \frac{(k_{33}k_{11} - k_{31}k_{13})}{k_{33}} - \left(\frac{(k_{33}k_{12} - k_{32}k_{13}) * (k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23})}{k_{33} * (k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23})}\right)$$

$$= \frac{(k_{33}k_{11} - k_{31}k_{13}) * (k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23})}{k_{33} * (k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23})} - \left(\frac{(k_{33}k_{12} - k_{32}k_{13}) * (k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23})}{k_{33} * (k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23})}\right)$$

$$= \frac{(k_{33}k_{11} - k_{31}k_{13}) * (k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23}) - (k_{33}k_{12} - k_{32}k_{13}) * (k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23})}{k_{33} * (k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23})}$$

$$= \frac{(k_{33}k_{11} - k_{31}k_{13}) * (k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23}) - (k_{33}k_{12} - k_{32}k_{13}) * (k_{33}k_{21} - k_{31}k_{23})}{k_{33}(k_{33}k_{22} - k_{32}k_{23})}$$

$$K_2^c = \frac{(k_{33}k_{11}k_{22} - k_{31}k_{13}k_{22} - k_{11}k_{32}k_{23}) - (k_{33}k_{12}k_{21} - k_{32}k_{13}k_{21} - k_{12}k_{31}k_{23})}{(k_{33} * k_{22} - k_{32} * k_{23})}$$

(*) En esta última expresión, se puede comprobar desarrollando el determinante (3x3) de la matriz K_3 que el numerador es equivalente a este. Luego se tiene que:

$$K_2^c = \frac{\det(K_3)}{\det(\overline{K}_2)}$$

donde: $\overline{K}_2 = submat(n-1,\ K_n)$, con $\det(\overline{K}_2) \neq 0$

Luego, por inducción se llega a:

$$K_{n-1}^c = \frac{det(K_n)}{det(\overline{K}_{n-1})}$$

Lo que es equivalente a:

$$\boxed{det(K_n) = K_{n-1}^c * det(\overline{K}_{n-1})}$$ ***Relación Fundamental (2)***

Relación Fundamental (3):

A partir de la Relación Fundamental (2) se tiene:

$$det(K_n) = K_{n-1}^c * det(\overline{K}_{n-1})$$

$$det(\overline{K}_{n-1}) = \overline{K}_{n-2}^c * det(\overline{K}_{n-2})$$

$$\dots$$

$$det(\overline{K}_3) = \overline{K}_2^c * det(\overline{K}_2)$$

$$det(\overline{K}_2) = \overline{K}_1^c * det(\overline{K}_1)$$

$$det(\overline{K}_2) = \overline{K}_1^c * \overline{K}_1$$

$$\overline{K}_0^c = \overline{K}_1$$

$$det(\overline{K}_2) = \overline{K}_1^c * \overline{K}_0^c$$

$$det(\overline{K}_3) = \overline{K}_2^c * \overline{K}_1^c * \overline{K}_0^c$$

$$\dots$$

$$det(K_n) = K_{n-1}^c * \overline{K}_{n-2}^c * \dots * \overline{K}_2^c * \overline{K}_1^c * \overline{K}_0^c \quad \text{con:} \quad \overline{K}_0^c = k_{nn} \;\text{ y }\; \overline{K}_1^c = \frac{e^1}{k_{nn}}$$

$$\boxed{\det(K_n) = K_{n-1}^c * \prod_{i=0}^{n-2} \overline{K}_i^c}$$

Relación Fundamental (3)

Relación Fundamental (4):

De la Relación Fundamental (3): $\det(K_n) = K_{n-1}^c * \prod_{i=0}^{n-2} \overline{K}_i^c$

$$det(K_n) = K_{n-1}^c * \overline{K}_{n-2}^c * \dots * \overline{K}_2^c * \overline{K}_1^c * \overline{K}_0^c$$

De la Relación Fundamental (1), ejemplificando para $n = 5$:

$$K_p^c = \frac{K_p^*}{\prod_{i=0}^{p-1} k_i^*} \qquad \text{con } 1 \le p \le n-1; \;\; k_i^* \neq 0$$

$$\overline{K}_1^c = \frac{\overline{K}_1^*}{\prod_{i=0}^{0} k_i^*} = \frac{\overline{K}_1^*}{k_0^*} = \frac{e^1}{k_{55}}$$

$$\overline{K}_2^c = \frac{\overline{K}_2^*}{\prod_{i=0}^{1} k_i^*} = \frac{\overline{K}_2^*}{k_0^* * k_1^*} = \frac{e_2^1}{k_{55} * e^1}$$

$$\overline{K}_3^c = \frac{\overline{K}_3^*}{\prod_{i=0}^{2} k_i^*} = \frac{\overline{K}_3^*}{k_0^* * k_1^* * k_2^*} = \frac{e_3^1}{k_{55} * e^1 * e_2^1}$$

$$K_4^c = \frac{K_4^*}{\prod_{i=0}^{3} k_i^*} = \frac{K_4^*}{k_0^* * k_1^* * k_2^* * k_3^*} = \frac{e_4^1}{k_{55} * e^1 * e_2^1 * e_3^1}$$

Uniendo todo en la expresión del determinante, relación fundamental 3:

$$det(K_n) = K_{n-1}^c * \overline{K}_{n-2}^c * \ldots * \overline{K}_2^c * \overline{K}_1^c * \overline{K}_0^c$$

$$det(K_5) = K_4^c * \overline{K}_3^c * \overline{K}_2^c * \overline{K}_1^c * \overline{K}_0^c$$

$$det(K_5) = \frac{e_4^1}{k_{55} * e^1 * e_2^1 * e_3^1} * \frac{e_3^1}{k_{55} * e^1 * e_2^1} * \frac{e_2^1}{k_{55} * e^1} * \frac{e^1}{k_{55}} * k_{55}$$

$$det(K_5) = \frac{e_4^1}{k_{55} * e^1 * e_2^1} * \frac{1}{k_{55} * e^1} * \frac{1}{k_{55}} = \frac{e_4^1}{(k_{55})^3 * (e^1)^2 * e_2^1} = \frac{K_4^*}{(k_0^*)^3 * (k_1^*)^2 * k_2^*}$$

Generalizando para n:

$$\boxed{det(K_n) = \frac{K_{n-1}^*}{\prod_{i=0}^{n-3} (k_i^*)^{n-2-i}}}$$

Donde: $k_0^* = k_{nn}$; $k_1^* = e^1$ Con: $n \geq 3;\ k_i^* \neq 0$ ***Relación Fundamental (4)***

Relación Fundamental (5): ***Empírica, aún sin demostración.***

$$\boxed{det(K_n) = \frac{det\left(K_p^*\right)}{\prod_{i=0}^{p-1} (k_i^*)^{n-2-i}}}$$

Con: $1 \leq p \leq n-1;\ k_i^* \neq 0$ ***Relación Fundamental (5)***

Relación Fundamental (6): ***Empírica, aún sin demostración.***

$$\boxed{det\left(\overline{K}_p\right) = \frac{k_{p-1}^*}{\prod_{i=0}^{p-3} (k_i^*)^{p-2-i}}}$$

Con: $3 \leq p \leq n;\ k_i^* \neq 0$ $\overline{K}_p = \ submat(p,\ K_n)$ ***Relación Fundamental (6)***

Ejemplos.

Sea $K_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

$K_1^* = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 14 \\ 2 & -4 & 6 & 20 \\ 1 & -4 & -7 & -30 \end{bmatrix}$ $(k_1^*)_{22} = 8 = (4*3-4*1)$ $(k_1^*)_{33} = 6 = (4*4-5*2)$

$K_2^* = \begin{bmatrix} -92 & -112 & 44 \\ -224 & -184 & 8 \\ -80 & 200 & -40 \end{bmatrix}$ $(k_2^*)_{33} = -40 = ((-30)*6-(-7)*20)$

$K_3^* = \begin{bmatrix} 7200 & -4320 \\ 9600 & 5760 \end{bmatrix}$ $(k_3^*)_{12} = -4320 = ((-40)*(-112)-(200)*44)$

$K_4^* = [82944000]$

$\det(K_5) = -36$

$\det(K_1^*) = -2304$ → $-36 = {}^{-2304}\!/_{4^3}$ Relac. Fundam. (5) $[n = 5;\ p = 1]$

$\det(K_2^*) = -2073600$ → $-36 = {}^{-2073600}\!/_{(4^3*(-30)^2)}$ Relac. Fundam. (5) $[n = 5;\ p = 2]$

$\det(K_3^*) = 82944000$ → $-36 = {}^{82944000}\!/_{(4^3*(-30)^2*(-40))}$ Relac. Fundam. (4) $[n = 5]$

$k_0^* = k_{55} = 4$ $k_1^* = (k_1^*)_{44} = -30$ $k_2^* = (k_2^*)_{33} = -40$

$k_3^* = (k_3^*)_{22} = 5760$ $k_4^* = (k_4^*)_{11} = 82944000$

$\bar{K}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ → $\det(\bar{K}_3) = -10 = {}^{k_2^*}\!/_{k_0^*} = {}^{-40}\!/_{4}$ Relac. Fundam. (6) $[p = 3]$

$\bar{K}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 6 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ → $\det(\bar{K}_4) = -12 = \frac{k_3^*}{(k_0^*)^2*k_1^*} = \frac{5760}{(4)^2*(-30)}$ Relac. Fundam. (6) $[p = 4]$

RESUMEN DE EXPRESIONES EN PALABRAS

(1) La condensada del paso p (K_p^c) es igual a la condensada simple del paso p (K_p^*), dividida por la multiplicatoria de las $(p-1)$ sub-condensadas simples principales, desde $i=0$.
(2) El determinante de K_n es igual a su condensada máxima (K_{n-1}^c), multiplicada por el determinante de la submatriz de orden $(n-1)$.
(3) El determinante de K_n es igual a la multiplicación entre la condensada máxima (K_{n-1}^c) y la multiplicatoria de cada condensada máxima de las $(n-2)$ submatrices de K_n ($\overline{K}_i^c$), desde $i=0$.
(4) El determinante de K_n es igual a su condensada simple máxima, dividida por la multiplicatoria de las $(n-3)$ sub-condensadas simples principales (k_i^*), elevadas cada una a la potencia $(n-2-i)$ según su posición en la serie, desde $i=0$.
(5) El determinante de K_n es igual al determinante de cualquiera de sus p-ésimas condensadas simples (K_p^*), dividido por la multiplicatoria de las $(p-1)$ sub-condensadas simples principales (k_i^*), elevadas cada una a la potencia $(n-2-i)$ según su posición en la serie, desde $i=0$.
(6) El determinante de cualquier submatriz de K_n ($\overline{K}_p$) es igual a la $(p-1)$-ésima sub-condensada simple principal (k_{p-1}^*), dividida por la multiplicatoria de las $(p-3)$ sub-condensadas simples principales (k_i^*), elevadas cada una a la potencia $(p-2-i)$ según su posición en la serie, desde $i=0$.

Personas y Trabajos Relacionados:

Este trabajo carece de referencias con excepción de la indicada al comienzo, puesto que su desarrollo se debió a una interrogante personal derivada de una temática del área de la Ingeniería Estructural, sin mayor pretensión ni formalidad. Posterior a la determinación de resultados se procedió a recopilar información para decidir sobre la relevancia de su publicación, los cuales se resumen en el siguiente listado:

(1) René Montante P., Ingeniero Mecánico y Matemático Mexicano, (1975).
(2) Erwin H. Bareiss, “Sylvester's Identity and Multistep Integer-Preserving Gaussian Elimination”, (1968).
(3) Felice Chió, “Mémoire sur les fonctions connues sous le nom de résultantes ou de déterminants”, (1853).
(4) Charles Dodgson (Lewis Carrol), “Condensation of Determinants, being a new and brief Method for computing their arithmetical values”. *Proceedings of the Royal Society of London*. 15: 150–155, (1866).
(5) Issai Schur, “Uber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschrankt sind [I]”. *Journal fiir die reine und angewandte Mathematik,* 147, 205-232, (1917).
(6) James J. Sylvester, "On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions". *Philosophical Magazine*. 1: 295–305, (1851).
(7) Carl Gustav Jacobi, "De Determinantibus functionalibus”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 22: 319-359, (1841).