Persistant vertices in minimum dominating sets

Valentin Bouquet, François Delbot and Christophe Picouleau

February 6, 2020

Sommets persistants et absents pour les dominants minimums dans les graphes. Acte I.

Valentin Bouquet[1], François Delbot[2], Christophe Picouleau[1]

[1] Conservatoire National des Arts et Métiers, CEDRIC laboratory, Paris (France). : valentin.bouquet@cnam.fr,christophe.picouleau@cnam.fr

[2] Sorbonne Université, Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6), Paris (France). : francois.delbot@lip6.fr

Mots-clés : *ensemble dominant minimum, graphe triangulé, graphe sans-griffe, cographe*

Nous caractérisons les sommets appartenants, à tous, à certains, à aucun, ensembles dominants minimums. Voir [5] pour l'ensemble de nos résultats sur le sujet.

Introduction : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté. Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on écrit $G[S]$ comme étant le sous-graphe induit par les sommets de S. Un ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un dominant de G si et seulement si pour tout sommet $v \in V \setminus D$, v a un voisin dans D. Un ensemble dominant minimum (mds), est un dominant de cardinalité minimale. On note $\gamma(G)$ la cardinalité d'un mds pour le graphe G. Soit $\Omega(G)$ l'ensemble des dominants minimums du graphe G. Soit $core(G) = \bigcap\{S : S \in \Omega(G)\}$ l'ensemble des sommets appartenant à tous les mds de G, $corona(G) = \bigcup\{S : S \in \Omega(G)\}$ l'ensemble des sommets appartenant à au moins un mds de G et $anticore(G) = V - corona(G)$ l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun mds de G. La partition suivante des sommets V est définie dans [2] : $V^0 = \{v \in V : \gamma(G - v) = \gamma(G)\}$, $V^+ = \{v \in V : \gamma(G - v) > \gamma(G)\}$ et $V^- = \{v \in V : \gamma(G - v) < \gamma(G)\}$.

Résultats : Nous présentons la caractérisation suivante pour les sommets n'appartenant à aucun mds, pour les sommets appartenant à tous les mds et pour les sommets appartenant à quelques mds mais pas tous.

Etant donnés $G = (V, E)$ et $v \in V$, le graphe $G_v + u$ est construit à partir de G en ajoutant un nouveau sommet u relié uniquement a v.

Théorème 1 *$v \in anticore(G)$ si et seulement si $\gamma(G_v + u) = \gamma(G) + 1$.*

Théorème 2 *$v \in core(G)$ si et seulement si soit*

1. *v est isolé ou*
2. *$\gamma(G - v) > \gamma(G)$ ou*
3. *$\gamma(G - v) = \gamma(G)$ et chaque sous-ensemble $S, |S| = \gamma(G)$, qui domine $G - v$ est tel que $S \cap N[v] = \emptyset$.*

Corollaire 1 *$v \in corona(G) - core(G)$ si et seulement si soit*

1. *$v \in V^-$ et v n'est pas isolé*
2. *$v \in V^0$ et il existe $S, |S| = \gamma(G)$, qui domine $G - v$ tel que $S \cap N[v] \neq \emptyset$ et $\gamma(G_v + u) = \gamma(G)$.*

Nous raffinons la caractérisation de $core(G)$ pour certaines classes de graphes. Rappelons que les graphes sans P_4 sont les cographes [1].

Proposition 1 *Soit $G = (V, E)$ un cographe connexe avec au moins deux sommets. Alors $0 \leq |core(G)| \leq 1$. Si $|core(G)| = 1$ alors $core(G) = V^+$.*

On rappelle qu'un graphe est triangulé si et seulement chaque cycle induit de longueur au moins quatre contient une corde.

Théorème 3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe triangulé connexe avec au moins deux sommets. Alors $v \in core(G)$ si et seulement si $\gamma(G - v) > \gamma(G)$.*

Rappelons qu'un graphe d'intervalles est triangulé [1].

Proposition 2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'intervalles et v un sommet de G. Décider si soit $v \in core(G)$ ou $v \in anticore(G)$ ou $v \in corona(G) - core(G)$ peut être calculé en temps $O(|V| + |E|)$.*

Enfin, nous montrons quelques exemples de graphes répondant à des questions ouvertes dans la litérature sur les ensembles dominants minimums. Dans [4], V. Samodivkin soulève deux questions :

1. Existe t-il un graphe connexe $G = (V, E)$ tel que $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ pour tout $v \in V$ et que $core(G) \neq \emptyset$?
2. Existe t-il un graphe connexe $G = (V, E)$ tel qu'il existe $w \in V, w \in V^+$, et pour tout $v \in V, v \neq w$, de telle sorte que $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ avec $u \in V, u \neq w, u \in core(G)$?

Le graphe de la Figure 1 donne une réponse positive à la première question. Le graphe de la Figure 2 donne une réponse positive à la deuxième.

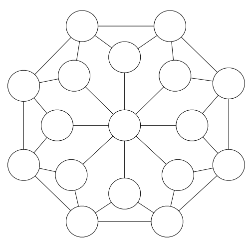

FIG. 1 – Tous les sommets sont dans V^0 et le sommet central est dans $core(G)$.

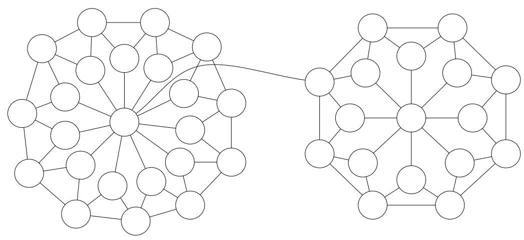

FIG. 2 – Le sommet central de gauche est dans V^+, tous les autres sommets dans V^0 et le sommet central de droite est dans $V^0 \cap core(G)$.

Références

[1] A. Brandstädt, V. B. Le, J. Spinrad, *Graph Classes : A survey*, SIAM, (2004).

[2] Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, Peter J. Slater *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker Inc., (1998).

[3] C. M. Mynhardt (1999), *Vertices Contained in Every Minimum Dominating Set of a Tree*, J. Graph Theory 31, 163-177.

[4] V. Samodivkin (2008), *Changing and unchanging of the domination number of a graph*, Discrete Mathematics 308, 5015-5025.

[5] V. Bouquet, François Delbot, Christophe Picouleau (2019), *On the vertices belonging to all, some, none minimum dominating set*, arXiv :1909.02843.