



Sliding-Mode Control of Systems with Stochastic Communication Delays

Rômulo Alves and José Paulo Cunha

EasyChair preprints are intended for rapid dissemination of research results and are integrated with the rest of EasyChair.

October 25, 2023

Controle por Modo Deslizante para Sistemas com Atrasos de Comunicação Estocásticos^{*}

Rômulo Thaygor Hatakeyama Alves^{*} José Paulo V. S. Cunha^{**}

^{*} Petrobras, (e-mail: romulothaygor@petrobras.com.br).

^{**} Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, (e-mail: jpaulo@ieee.org)

Abstract: This paper presents a networked control system subjected to stochastic time-delays. The sensor signals are sampled periodically and sent by a computer network with stochastic communication delays of known distribution. The proposed control strategy is based on the sliding-mode control combined with a continuous-time state observer with sampled output signals. The stability properties of the closed-loop system are analyzed. An application example and simulation results illustrate chattering elimination and the effectiveness of the proposed scheme.

Resumo: Este artigo apresenta um sistema de controle em rede sujeito a atrasos estocásticos. Os sinais dos sensores são amostrados periodicamente e em seguida enviados via rede de comunicação que possui atrasos estocásticos de distribuição conhecida. A estratégia de controle proposta é composta de um controlador por modo deslizante combinado com um observador de estado em tempo contínuo com sinais de saída amostrados. As propriedades de estabilidade do sistema de controle em malha fechada são analisadas. Um exemplo de aplicação e resultados de simulação são usados para ilustrar a eliminação de *chattering* e a eficácia do método proposto.

Keywords: Sliding-mode control; Control over networks; Time-delay systems; Stochastic systems; Observers.

Palavras-chaves: Controle por modo deslizante; Controle por redes; Sistemas com atrasos; Sistemas estocásticos; Observadores.

1. INTRODUÇÃO

Com o advento da Internet das Coisas, (IoT — *Internet of Things*), muitas inovações tecnológicas surgiram, compondo o que tem sido denominado 4^a *revolução industrial*. Assim, os sistemas de comunicação sem fios tem se tornado cada vez mais atraentes nesses ambientes, oferecendo menores custos de implantação e maior facilidade de reconfiguração, quando comparados às redes cabeadas.

Embora a comunicação sem fios ofereça algumas características interessantes, não tem sido amplamente aceita no ambiente industrial. Alguns motivos são suas características estocásticas, interferências e propagação incertas (Liu et al., 2012) e a percepção de confiabilidade menor do que em redes com fios.

Os sistemas de controle de processos industriais requerem protocolos de comunicação que propiciem baixa latência, o consumo eficiente de energia e fácil configuração de diferentes topologias de conexão. Os padrões de comunicação sem fios *ZigBee* e IEEE 802.15.4, por exemplo, são capazes de atender esses requisitos e também pretendem padronizar o uso de Redes de Área Pessoal (PAN — *Personal Area Networks*).

A modelagem de atrasos estocásticos e perda de pacotes em sistemas de controle em rede sem fios (WNCS) tem sido amplamente investigada por muitos pesquisadores (Yu et al., 2011). As perdas acumuladas e os atrasos dependem muito dos protocolos de comunicação e do *hardware* usados. Além disso, os atrasos de comunicação geralmente variam no tempo, podem fazer com que o sistema de controle apresente um desempenho ruim e podem causar a instabilidade (Hespanha et al., 2007; Peng et al., 2009; Zhang et al., 2016; Ibarra et al., 2020).

Na literatura há diversos trabalhos discutindo e propondo aplicações para o *ZigBee*. Samijayani et al. (2020) retrataram a combinação deste protocolo com o *Wi-Fi* de modo a formar uma rede de monitoramento de cultivo de hortaliças hidropônicas. Xia et al. (2020) associaram o *ZigBee* e o 4G a fim de criar um sistema de monitoramento em tempo real de um sistema de geração de energia elétrica por meio de painéis fotovoltaicos. Ding et al. (2021) e Rašović e Mijanovic (2020) discutiram sobre o uso desta tecnologia na automação industrial, sobretudo Ding et al. (2021) destacaram que essa não irá competir com o *Wi-Fi*, mas integrar-se a esse. Por fim, Andrade e Cunha (2018) analisaram a estabilidade de controladores de realimentação de estado com atrasos estocásticos causados por redes sem fio. Os protocolos *ZigBee* e *Wi-Fi* nos modos UDP e TCP foram comparados experimentalmente com relação às perdas de pacotes e distribuição estocástica de atrasos.

^{*} O presente trabalho foi realizado com apoio da FAPERJ e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Brasil (CAPES) — Código de Financiamento 001.

O controle por modo deslizante (SMC — *Sliding Mode Control*) consiste em uma técnica de controle não-linear que busca alterar a dinâmica de um sistema ao aplicar um sinal de controle chaveado que visa trazer o estado para a superfície de deslizamento, a qual estabelece o comportamento dinâmico desejado (Utkin, 1992).

É fundamental buscar alternativas que visem suprimir os atrasos no SMC, pois são um problema de natureza prática com reais impactos nos desempenhos dos controladores. Desse modo, Tugal et al. (2022) apresentam uma técnica que combina o SMC com um estimador de atrasos em um veículo subaquático. Ao tratar dos atrasos, este método aumentou a eficiência energética do equipamento para reduzir o gasto de bateria. Ainda, Sun et al. (2022) investigaram a aplicação do SMC em um sistema com incertezas estocásticas, sujeito a perturbações externas, com perdas de pacotes e atrasos variantes. Para reduzir os efeitos das perdas de pacotes, os autores projetaram uma superfície de deslizamento robusta e incluíram na lei SMC um termo que visa compensar as incertezas do sistema. Coutinho et al. (2014) propuseram o uso de observadores conectados em cascata para lidar com grandes atrasos, sendo esses constantes e conhecidos em um sistema de controle por modo deslizante. Já Pinto et al. (2019) propuseram um observador por modo deslizante para a reconstrução dos sinais de saída da planta quando são amostrados e estão sujeitos a atrasos longos.

Este trabalho tem por objetivo compensar os atrasos de comunicação com características estocásticas em um sistema de controle por rede. Para tanto, está sendo proposto o uso de um observador de estado que opera simultaneamente em tempo contínuo e em tempo discreto e que permite a existência do modo deslizante ideal na malha de controle. A análise estocástica da estabilidade permite obter resultados menos conservadores do que abordagens determinísticas para a análise de sistemas com atrasos incertos.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Na Figura 1, tem-se a representação do sistema que será objeto de estudo. No elo de comunicação via rede, destacado pela cor em azul, ocorrem atrasos de comunicação com características estocásticas. Nesta, $u(t) \in \mathbb{R}^r$ é o sinal de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de saída, $\bar{y}(t)$ é o sinal obtido por meio de um amostrador de ordem zero com retenção (ZOH — *zero-order hold*) e sujeito a atrasos estocásticos. A variável $\hat{x}(t)$ é o estado estimado por um observador e x_d é um sinal de referência que estabelece a trajetória desejada. Por fim, *ISL* (do inglês, *Ideal Sliding Loop*) indica o laço onde ocorre o modo deslizante ideal (Utkin, 1992).

Para manter a simplicidade, a dinâmica da planta é linear, invariante no tempo e pode ser descrita pela seguinte equação de estado, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t). \quad (2)$$

Na Figura 1 há dois domínios de tempos distintos ocorrendo simultaneamente: o tempo discreto, visto o fato do

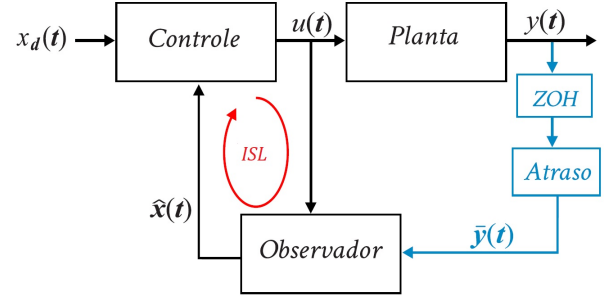


Figura 1. Sistema de controle sujeito a atrasos estocásticos de comunicação.

sinal de saída da planta ser amostrado; e o tempo contínuo, perfazendo os demais sinais indicados. O observador é capaz de receber sinais em tempo discreto e em tempo contínuo para gerar as estimativas do estado $\hat{x}(t)$ em tempo contínuo. Assim, o domínio em tempo discreto é definido como $S = \{t_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ e o domínio em tempo contínuo é definido como $t \in \mathbb{R}^+$.

As seguintes hipóteses são consideradas:

Hipótese 1. Os sensores empregados no sistema são orientados pelo tempo (em inglês, *time driven*), ou seja, a saída $y(t)$ é amostrada nos instantes $t_k = kh$ periodicamente espaçados, nos quais $h > 0$ s é o período de amostragem.

Hipótese 2. Os atrasos de comunicação $\tau_k \in [0, h)$ possuem características estocásticas conhecidas.

Hipótese 3. O par de matrizes $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ é controlável e o par $\{\mathbf{C}, \mathbf{A}\}$ é observável.

Os instantes de amostragem do sinal de saída da planta, conforme a Hipótese 1, e do sinal de saída do observador são sincronizados, portanto os atrasos de comunicação, mesmo possuindo características estocásticas segundo a Hipótese 2, poderiam ser considerados como sendo conhecidos quando cada amostra é recebida pelo observador. Algumas técnicas práticas descritas por Seuret et al. (2006) podem ser usadas para a sincronização das amostragens e determinação dos atrasos, baseadas, por exemplo, no Sistema de Posicionamento Global (GPS).

3. OBSERVADOR DE ESTADO PARA SISTEMAS COM ATRASOS ESTOCÁSTICOS

O observador de estado na Figura 1 é descrito pela equação:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \mathbf{A}\hat{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(\bar{y}(t) - \hat{y}(t)), \quad (3)$$

na qual \mathbf{L} é a matriz de realimentação do observador.

Assumindo-se que tanto o sinal de saída da planta, $y(t)$, quanto o sinal de saída do observador, $\hat{y}(t)$, são amostrados simultaneamente e mantidos constantes por meio de ZOHs até que o sinal de saída amostrado seguinte esteja disponível, tem-se que:

$$\bar{y}(t) = y[t_k] = \mathbf{C}x[t_k], \quad t_k + \tau_k \leq t < t_{k+1} + \tau_{k+1}, \quad (4)$$

$$\hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{x}[t_k], \quad t_k + \tau_k \leq t < t_{k+1} + \tau_{k+1}. \quad (5)$$

Definindo-se o erro de estimação

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \hat{x}(t) \quad (6)$$

e subtraindo (3) de (1), tem-se a equação que descreve a sua dinâmica:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}(\bar{y}(t) - \hat{y}(t)). \quad (7)$$

Definindo-se $\mathbf{x}_s[t_k] := \mathbf{x}[t_k] - \hat{\mathbf{x}}[t_k]$, então (7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x}_s[t_k], \quad t_k + \tau_k \leq t < t_{k+1} + \tau_{k+1}. \quad (8)$$

Definição 1: O sistema com atrasos de comunicação (8) é exponencialmente estável se existirem constantes $\alpha > 0$ e $c \geq 1$ tais que para qualquer solução de $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, a desigualdade

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq c e^{-\alpha t} \|\tilde{\mathbf{x}}_0\|_W, \quad \forall t \geq 0, \quad (9)$$

seja sempre satisfeita para qualquer condição inicial $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in W_{[-\bar{\tau}, 0]}$, na qual $\bar{\tau}$ é o atraso máximo admissível, vide (Cao, 2013) e (Silm et al., 2021).

Existem algumas técnicas para se calcular os ganhos do observador \mathbf{L} , garantindo que $\hat{\mathbf{x}}(t)$ convirja rápido o suficiente para o estado verdadeiro $\mathbf{x}(t)$, a uma taxa de decaimento exponencial α , conforme apresentado em (Silm et al., 2021). Além disso, Fridman (2014) provou a convergência exponencial aplicando uma função de Lyapunov-Krasovskii a um sistema com atrasos variáveis. Já Silm et al. (2021) apresenta um método para calcular o ganho \mathbf{L} que garanta convergência exponencial a uma taxa α para qualquer atraso variável no tempo em um determinado intervalo, $0 < \tau_k < \bar{\tau}$.

Para analisar a estabilidade considerando-se que τ_k é estocástico, utiliza-se o modelo discretizado de (8) desenvolvido pela abordagem de (Åström e Wittenmark, 2011, pp. 38–39):

$$\tilde{\mathbf{x}}[k+1] = \Phi \tilde{\mathbf{x}}[k] + \Gamma_{0\tau_k} \tilde{\mathbf{x}}[k] + \Gamma_{1\tau_k} \tilde{\mathbf{x}}[k-1] \quad (10)$$

no qual $\tilde{\mathbf{x}}[k] := \tilde{\mathbf{x}}(t_k)$,

$$\Phi = e^{\mathbf{A}h}, \quad (11)$$

$$\Gamma_{0\tau_k} = \left[\int_{\tau_k}^h e^{\mathbf{A}(h-t)} dt \right] \mathbf{L}\mathbf{C}, \quad (12)$$

$$\Gamma_{1\tau_k} = \left[\int_0^{\tau_k} e^{\mathbf{A}(h-t)} dt \right] \mathbf{L}\mathbf{C}. \quad (13)$$

Definindo-se o vetor de estado aumentado

$$\mathbf{X}[k] := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}[k] \\ \tilde{\mathbf{x}}[k-1] \end{bmatrix}, \quad (14)$$

a equação (10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{X}[k+1] = \Phi_{\tau_k} \mathbf{X}[k], \quad (15)$$

com a matriz de transição de estado

$$\Phi_{\tau_k} = \begin{bmatrix} (\Phi + \Gamma_{0\tau_k}) & \Gamma_{1\tau_k} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

a qual é variante no tempo por causa dos atrasos estocásticos.

Sadeghpour e Orosz (2016) utilizaram um método menos conservador do que (Andrade e Cunha, 2018) para a análise da estabilidade do sistema estocástico (15)–(16). Esse método utiliza o conceito de raio espectral, $\rho(\cdot)$.

Primeiro, assumindo-se que Φ_{τ_k} é independente e identicamente distribuído (i.i.d, em inglês *independent and identically distributed*), a esperança da equação (15) será:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}[k+1]\} = \mathbb{E}\{\Phi_{\tau_k} \mathbf{X}[k]\} = \left(\sum_{j=1}^J \omega_j \Phi_{\tau_k} \right) \mathbb{E}\{\mathbf{X}[k]\}, \quad (17)$$

na qual ω_j é a Função Densidade de Probabilidade do atraso τ_j , e J corresponde à quantidade total de atrasos que estão sendo considerados.

Definindo-se a média da matriz de transição como

$$\bar{\Phi} := \left(\sum_{j=1}^J \omega_j \Phi_{\tau_k} \right), \quad (18)$$

então, a esperança do estado do sistema dinâmico pode ser expressa como

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}[k+1]\} = \bar{\Phi} \mathbb{E}\{\mathbf{X}[k]\}. \quad (19)$$

A estabilidade da esperança do erro do sistema (15) apresentada a seguir é baseada em (Sadeghpour e Orosz, 2016).

Lema 4. Considere a média da dinâmica do sistema apresentada em (19). O raio espectral verifica a desigualdade $\rho(\bar{\Phi}) < 1$ se e somente se $\mathbb{E}\{\mathbf{X}[k]\}$ converge exponencialmente para a origem à medida que $k \rightarrow +\infty$.

Para completar a análise da estabilidade do sistema estocástico, Sadeghpour e Orosz (2016) estudaram a estabilidade do segundo momento da equação (15), ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbf{X}[k+1] \mathbf{X}^T[k+1]\} &= \mathbb{E}\{\Phi_{\tau_k} \mathbf{X}[k] \mathbf{X}^T[k] \Phi_{\tau_k}^T\} \\ &= \sum_{j=1}^J \left(\omega_j \Phi_{\tau_j} \mathbb{E}\{\mathbf{X}[k] \mathbf{X}^T[k]\} \Phi_{\tau_j}^T \right). \end{aligned} \quad (20)$$

O produto de Kronecker (\otimes) pode ser usado para reescrever (20) em uma forma vetorial, ($\text{vec}(\cdot)$), mais conveniente para permitir que seja calculado o raio espectral. Definindo-se:

$$\bar{\bar{\Phi}} := \sum_{j=1}^J \left(\omega_j \Phi_{\tau_j} \otimes \Phi_{\tau_j} \right), \quad (21)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}}[k] := \text{vec} \left(\mathbb{E}\{\mathbf{X}[k] \mathbf{X}^T[k]\} \right), \quad (22)$$

a equação (20) resulta em

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}}[k+1] = \bar{\bar{\Phi}} \bar{\bar{\mathbf{X}}}[k]. \quad (23)$$

A seguir uma condição de estabilidade do sistema dinâmico é enunciada.

Lema 5. Considere a média apresentada em (23). O raio espectral satisfaz a desigualdade $\rho(\bar{\bar{\Phi}}) < 1$ se e somente se $\bar{\bar{\mathbf{X}}}[k]$ converge exponencialmente para a origem à medida que $k \rightarrow +\infty$.

O Lema 5, inspirado em (Sadeghpour e Orosz, 2016), apresenta uma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema dinâmico (23), o que implica em uma estabilidade quase certa da equação do erro de estimação do sistema discreto (15).

4. CONTROLADOR POR MODO DESLIZANTE

Para manter a descrição do controlador de modo deslizante para rastreamento de trajetória o mais simples possível, neste trabalho está sendo considerada que a planta possui

apenas uma entrada e saída, e que a sua função de transferência não possui zeros. Assim, uma realização para (1)–(2) é dada pelas matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad (24)$$

com o vetor de estado $\mathbf{x} = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T$.

A referência a ser rastreada é o vetor de sinal contínuo $\mathbf{x}_d(t) = [y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-1)}]^T$. Assume-se que a derivada no tempo $y_d^{(n)}(t)$ é contínua por partes e uniformemente limitada. Assumindo-se que todas as variáveis de estado devem seguir o sinal de referência, uma lei de controle deve ser elaborada de modo que o vetor de erro

$$\mathbf{e} := \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_d = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T \quad (25)$$

convirja para a origem.

De modo similar ao apresentado em (Edwards e Spurgeon, 1998), a superfície de deslizamento pode ser descrita como sendo uma combinação linear do vetor de erro

$$\sigma = c_0 e + c_1 \dot{e} + \dots + c_{n-2} e^{(n-2)} + e^{(n-1)} = 0. \quad (26)$$

Os coeficientes c_0, c_1, \dots, c_{n-2} devem ser escolhidos de modo que o polinômio $s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \dots + c_1 s + c_0$ seja Hurwitz, em que s é a frequência complexa de Laplace. Portanto, se a lei de controle for elaborada de modo que $\sigma(t) \rightarrow 0$ em tempo finito, então pode-se concluir que $e^{(i)}(t) \rightarrow 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) exponencialmente.

A lei de controle a estrutura variável usada consiste na combinação de uma lei de controle nominal, u_{nom} , e uma lei de controle chaveada, u_{sw} :

$$u = b_0^{-1} (u_{nom} + u_{sw}), \quad (27)$$

$$u_{nom} = y_d^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \hat{y}^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-2} c_i e^{(i+1)}. \quad (28)$$

De modo a satisfazer a condição de existência do modo deslizante, em (Utkin e Lee, 2006) é usada a seguinte lei de controle chaveada:

$$u_{sw} = -\eta \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (29)$$

na qual $\eta > 0$ é a amplitude do sinal chaveado.

As propriedades de estabilidade do sistema de controle proposto são apresentadas no teorema abaixo.

Teorema 6. Considere o sistema representado pelas equações (1)–(2) e (24), tendo seu sinal de saída amostrado e sujeito a atrasos estocásticos. Utiliza-se também o observador (3), a lei de controle (27), que combina o controle nominal (28) com o controle chaveado (29), no qual σ está indicado na equação (26). Além disso, considere o vetor de erro de rastreamento apresentado em (25). Se as Hipóteses 1–3 são válidas e o raio espectral da matriz (21) atende à desigualdade $\rho(\overline{\Phi}) < 1$, então haverá a estabilidade quase certa do erro de estimação $\|\hat{\mathbf{x}}(t)\| \rightarrow 0$ e os erros

de rastreamento $\|\mathbf{e}(t)\| \rightarrow 0$ e $e_o(t) := y(t) - y_d(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Prova. A estabilidade quase certa do erro de estimação $\hat{\mathbf{x}}(t)$ decorre do Lema 5.

Para mostrar a convergência do sinal σ , considere a seguinte função quadrática:

$$V = \frac{1}{2} \sigma^2, \quad (30)$$

cujas derivada é

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma}. \quad (31)$$

A partir das equações (24)–(29), é possível concluir que a derivada do sinal σ pode ser expressa como

$$\dot{\sigma} = u_{sw} + \pi(t), \quad (32)$$

na qual o sinal $\pi(t)$ é um termo transitório dependente do erro de estimação $\hat{\mathbf{x}}(t)$, que tende a zero de forma quase certa. Então, substituindo-se o sinal de controle chaveado (29), tem-se

$$\dot{V} = \sigma (-\eta \operatorname{sgn}(\sigma) + \pi(t)) = -\eta |\sigma| + \sigma \pi(t), \quad (33)$$

que será negativa a partir de algum instante de tempo e , conseqüentemente, $\sigma \rightarrow 0$ em tempo finito. Conseqüentemente, o vetor de erro $\mathbf{e}(t)$ também convergirá para a origem. Uma vez que é quase certo que o erro de estimação convergirá para a origem, pode-se concluir que o erro de rastreamento da saída $e_o(t) \rightarrow 0$. \square

5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere o sistema dinâmico (1)–(2) com matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{C} = [1 \ 0]$. O sinal de saída $y(t)$ é amostrado por um ZOH com período $h = 0,1$ s

Os autovalores da matriz \mathbf{A} são $\lambda_1 = -1,618$ rad/s e $\lambda_2 = 0,618$ rad/s, portanto, este sistema é instável. Assim, o objetivo primário é estabilizar o sistema sujeito a atrasos estocásticos de comunicação. Além disso, o sinal de saída deve rastrear uma trajetória desejada, $y_d = \operatorname{sen}(t)$. Os parâmetros selecionados para o SMC foram $\eta = 55$ e $c_0 = 1,5$.

A distribuição dos atrasos empregados nesta simulação é mostrada na Figura 2 e foi obtida de um experimento realizado por Andrade e Cunha (2018) para um sistema de comunicação sem fios *ZigBee*. O atraso máximo medido é 74,212 ms, o valor médio dos atrasos é 10,666 ms e o mínimo valor mensurado é 2,814 ms. Nesse experimento não foi observada nenhuma perda de pacotes nem desordenamento. A Figura 3 exibe todos os atrasos medidos experimentalmente e que foram usados nesta simulação.

Como pode ser notado na Figura 2, a maioria dos atrasos está concentrada em torno de 10 ms, motivo pelo qual este foi o valor do atraso máximo $\bar{\tau}$ usado para calcular os ganhos do observador $\mathbf{L} = [2,031 \ 1,026]^T$, seguindo a abordagem descrita em (Silm et al., 2021).

A análise da estabilidade estocástica da equação dinâmica do erro de estimação do observador via Lema 5 requer que o raio espectral $\rho(\overline{\Phi}) = 0,00276$ da matriz (21) seja menor do que um, o que atende a condição para a

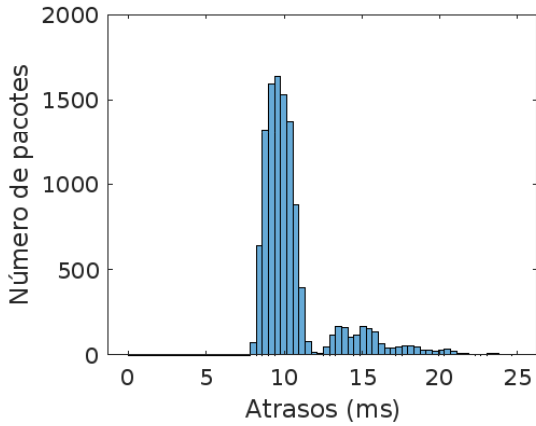


Figura 2. Histograma dos atrasos medidos na rede *ZigBee*.
Fonte: Andrade e Cunha (2018), com adaptações.

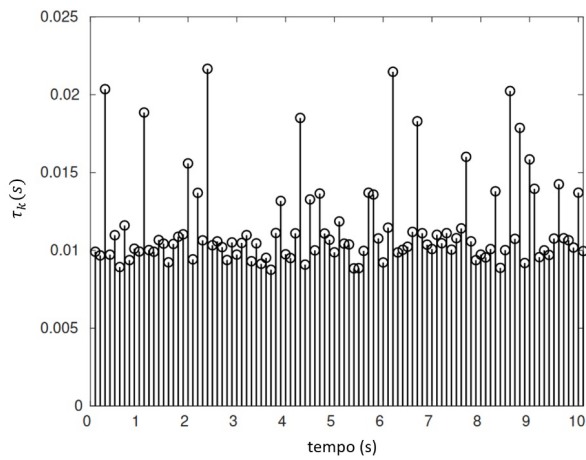


Figura 3. Atrasos medidos durante a simulação.

estabilidade quase certa. É notável que o tempo máximo de atraso 74, 212 ms é realmente muito maior do que o limite superior $\bar{\tau} = 10$ ms assumido para o projeto do observador. Isso indica que os métodos de projeto determinísticos que se utilizam do pior caso podem ser muito conservadores para sistemas com atrasos estocásticos.

A Figura 4 apresenta a trajetória desejada y_d e a saída da planta $y(t)$. Verifica-se que após alguns segundos, $y(t)$ segue $y_d(t)$.

A Figura 5 mostra o sinal de saída amostrado e sujeito a atrasos $\bar{y}(t)$. A Figura 6 é uma ampliação da Figura 5, para que na evolução inicial de $\bar{y}(t)$ podem ser melhor vistos os efeitos dos atrasos aleatórios. As setas verdes indicam os instantes de amostragem do sinal $y(t_k)$ e as vermelhas indicam quando essas amostras são recebidas.

A Figura 7 apresenta o sinal de controle com modo de deslizamento ideal. Observa-se a comutação em alta frequência, teoricamente infinita, em virtude do observador evitar o fenômeno *chattering*.

A Figura 8 apresenta os erros de estimação \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 . Pode-se observar que em quatro segundos esses sinais de erro convergem praticamente para zero. Finalmente, a convergência dos estados estimados para os estados reais da planta pode ser vista na Figura 9.

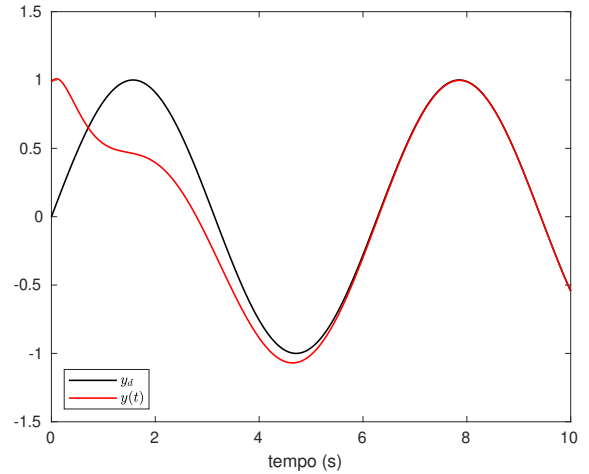


Figura 4. Comparação entre o sinal de saída da planta $y(t)$ e o sinal de saída desejável $y_d(t)$.

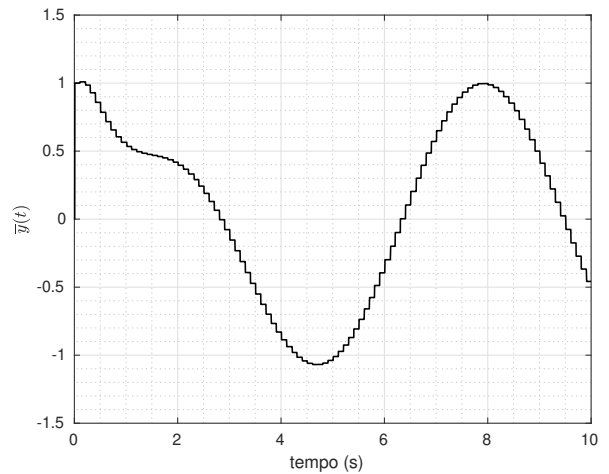


Figura 5. Sinal de saída da planta amostrado e sujeito a atrasos estocásticos.

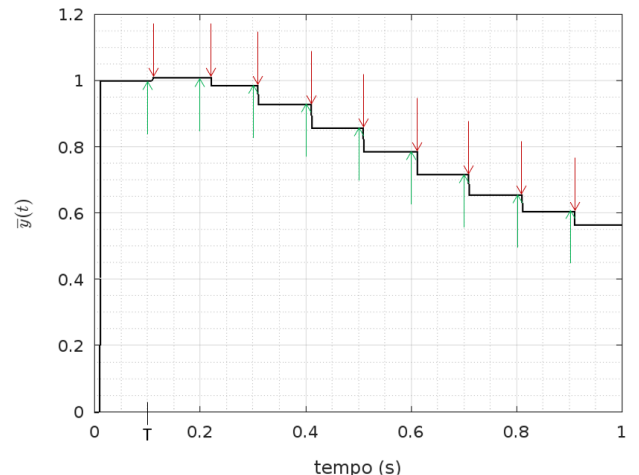


Figura 6. Gráfico ampliado do sinal de saída da planta amostrado e sujeito a atrasos estocásticos.

Para ilustrar a relevância do esquema de controle proposto neste artigo, a Figura 10 apresenta a trajetória desejada y_d e a saída da planta $y(t)$ obtida com o controlador de estrutura variável baseado nas medições de estado

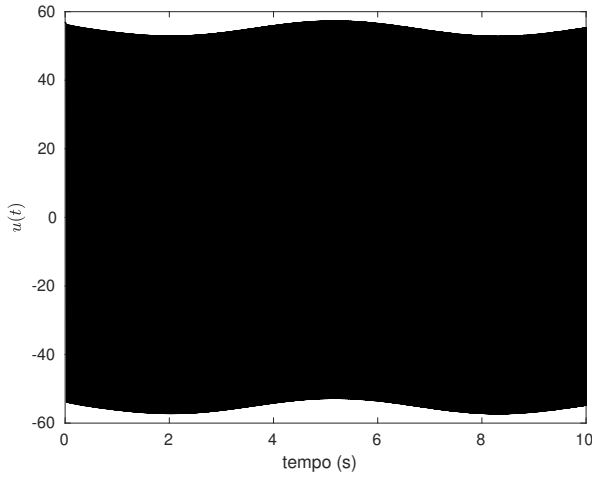


Figura 7. Sinal de controle.

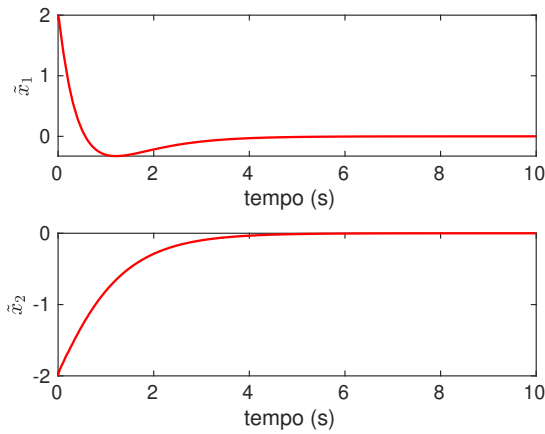


Figura 8. Erros de estimação \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 do observador.

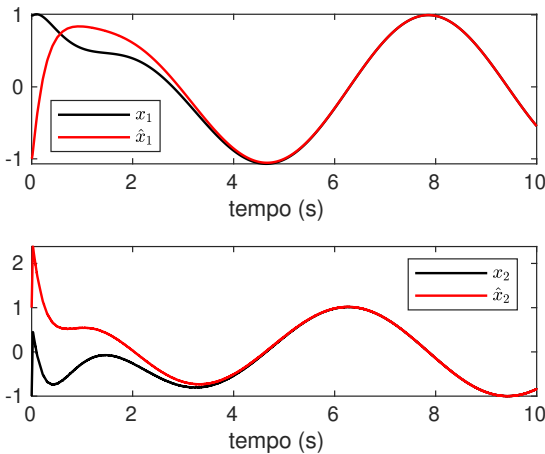


Figura 9. Comparação entre as variáveis de estado x_1 e x_2 e suas estimativas \hat{x}_1 e \hat{x}_2 .

amostrado e atrasado, sem o uso do observador estudado. Observa-se que o uso de sinais amostrados e atrasados afetaram o desempenho do controlador, gerando *chattering* no sinal de saída e erros de rastreamento da trajetória intoleráveis.

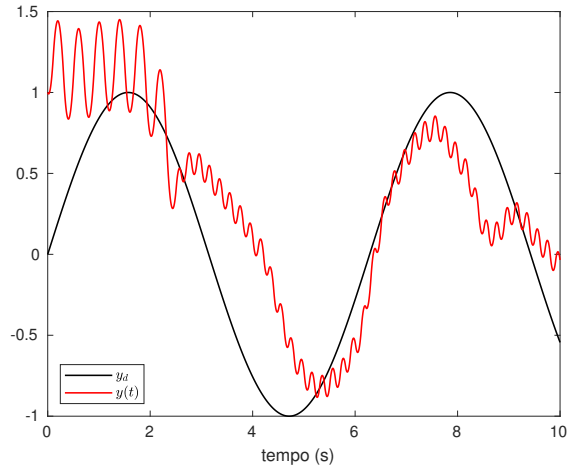


Figura 10. Comparação entre o sinal de saída da planta $y(t)$ e o sinal de saída desejável $y_d(t)$ sem o uso de observador.

6. CONCLUSÃO

Este artigo descreveu um sistema de controle por rede com atrasos de comunicação que são variantes no tempo, incertos e com função de densidade de probabilidade estocástica conhecida. Um observador foi projetado para lidar com as medições atrasadas e permitir a realização do modo deslizante. Esta estratégia possui uma malha de controle de modo deslizante ideal, livre do indesejável fenômeno *chattering* que poderia ser gerado pelos atrasos. O sistema de controle proposto estabiliza a planta e força seu sinal de saída a seguir uma trajetória desejada.

Uma análise de estabilidade estocástica indica que observadores projetados para atrasos limitados podem ser robustos a atrasos muito maiores do que aqueles previstos por análise determinística. Assim, a análise de estabilidade estocástica pode fornecer resultados menos conservadores.

O desempenho do esquema proposto foi ilustrado por resultados de simulação obtidos com atrasos estocásticos medidos em uma rede sem fios real.

Para simplificar esta abordagem inicial e manter seu foco na realização do modo deslizante ideal em sistemas com sinais com atrasos estocásticos, não foram consideradas incertezas paramétricas nem perturbações. Pretende-se analisar seus efeitos bem como propor técnicas para mitigá-los em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- Andrade, I.H. e Cunha, J.P.V.S. (2018). Estabilidade de sistemas com realimentação de estado com atraso estocástico em redes sem fios. In *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*, 1–8. João Pessoa – PB.
- Åström, K.J. e Wittenmark, B. (2011). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. Dover Publications, 3rd edition.
- Cao, J. (2013). Improved delay-dependent exponential stability criteria for time-delay system. *J. Franklin Institute*, 350(4), 790–801.
- Coutinho, C.L., Oliveira, T.R., e Cunha, J.P.V.S. (2014). Output-feedback sliding-mode control via cascade ob-

- servers for global stabilisation of a class of nonlinear systems with output time delay. *Int. J. Contr.*, 87(11), 2327–2337.
- Ding, S.Y., Liu, J.L., e Yue, M.H. (2021). The use of ZigBee wireless communication technology in industrial automation control. *Wireless Communications and Mobile Computing*, 2021, 1–11.
- Edwards, C. e Spurgeon, S.K. (1998). *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor & Francis Ltd.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay systems: analysis and control*. Birkhäuser.
- Hespanha, J.P., Naghshtabrizi, P., e Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 138–162.
- Ibarra, L.P.O., Barragan, H.C., e Loukianov, A. (2020). Predictor-based control for nonlinear mechanical systems with measurement delay. In *Proc. 21st IFAC World Congress*, volume 53, 5783–5788. Berlin.
- Liu, Z., Ma, M., e Dai, J. (2012). Utility-based scheduling in wireless multi-hop networks over non-deterministic fading channels. *Computer Networks*, 56(9), 2304–2315.
- Peng, C., Yue, D., Tiam, E., e Gu, Z. (2009). A delay distribution based stability analysis and synthesis approach for networked control systems. *J. Franklin Institute*, 346(4), 349–365.
- Pinto, H.L.C.P., Oliveira, T.R., e Hsu, L. (2019). Sliding mode observer for fault reconstruction of time-delay and sampled-output systems — a time shift approach. *Automatica*, 106, 390–400.
- Rašović, I. e Mijanovic, Z. (2020). Proposal of an industrial communication system based on ZigBee technology. In *Proc. 24th Int. Conf. Information Technology (IT)*, 1–4. Zabljak, Montenegro.
- Sadeghpour, M. e Orosz, G. (2016). Stability of continuous-time systems with stochastic delay. In *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, 3708–3713. Las Vegas, NV.
- Samijayani, O.N., Darwis, R., Rahmatia, S., Mujadin, A., e Astharini, D. (2020). Hybrid ZigBee and WiFi wireless sensor networks for hydroponic monitoring. In *Int. Conf. Electrical, Communication, and Computer Eng. (ICECCE)*, 1–4. Istanbul, Turkey.
- Seuret, A., Michaut, F., Richard, J.P., e Divoux, T. (2006). Networked control using GPS synchronization. In *Proc. American Contr. Conf.*, 4195–4200. Minneapolis, MN.
- Silm, H., Ushirobira, R., Efimov, D., Fridman, E., Richard, J.P., e Michiels, W. (2021). Distributed observers with time-varying delays. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 66(11), 5354–5361.
- Sun, S., Cui, W., e Zheng, J. (2022). Robust sliding mode control for stochastic uncertain discrete systems with two-channel packet dropouts and time-varying delays. *Sensors*, 22(5), 1965.
- Tugal, H., Cetin, K., Han, X., Kucukdemiral, I., Roe, J., Petillot, Y., e Erden, M.S. (2022). Sliding mode controller for positioning of an underwater vehicle subject to disturbances and time delays. In *Proc. Int. Conf. Robotics and Automation (ICRA)*, 3034–3039. Philadelphia, PA.
- Utkin, V.I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag.
- Utkin, V. e Lee, H. (2006). Chattering problem in sliding mode control systems. In *Proc. 9th Int. Workshop on Variable Structure Sys.*, 346–350. Alghero, Sardinia.
- Xia, K., Ni, J., Ye, Y., Xu, P., e Wang, Y. (2020). A real-time monitoring system based on ZigBee and 4G communications for photovoltaic generation. *CSEE J. Power and Energy Systems*, 6(1), 52–63.
- Yu, B., Shi, Y., e Lin, Y. (2011). Discrete-time H_∞ output tracking control of wireless networked control systems with Markov communication models. *Wireless Communications & Mobile Computing*, 11(8), 1107–1116.
- Zhang, X.M., Han, Q.L., e Yu, X. (2016). Survey on recent advances in networked control systems. *IEEE Trans. Ind. Informatics*, 12(5), 1740–1752.